

---

# Modelle der nicht-kompatiblen mikropolaren Plastizität und Kontaktmechanik

---

**Micropolar non-compatible plasticity models and contact mechanics**

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

Vom Fachbereich Bau- und Umweltingenieurwissenschaften genehmigte Dissertation von

Dipl.-Ing. Daniel Johannsen aus Mainz

Juli 2014 — Darmstadt — D 17

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Bau- und Umweltingenieurwis-  
senschaften  
Kontinuumsmechanik

---

Modelle der nicht-kompatiblen mikropolaren Plastizität und Kontaktmechanik  
Micropolar non-compatible plasticity models and contact mechanics

Vom Fachbereich Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
genehmigte Dissertation von Dipl.-Ing. Daniel Johannsen aus Mainz

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis
2. Gutachten: Prof. Dr. rer. nat. Michael Schäfer

Tag der Einreichung: 10.03.2014

Tag der Prüfung: 09.05.2014

Darmstadt — D 17

---

## Kurzfassung

---

In dieser Arbeit werden Materialmodelle vorgestellt, die Kopplungseffekte zwischen makro- und mikroskopischen Längenskalenbereiche berücksichtigen. Die Theorie dieser Modelle ist in der Lage, bei einem Übergang zu kleineren Bauteilabmessungen einen wachsenden Einfluss mikroskopischer Materialstrukturen auf das Materialverhalten abzubilden. Ein solches Verhalten wird als Längenskaleneffekt bezeichnet. Die Entwicklung der Modelle wird im Rahmen einer mikropolaren Kontinuumstheorie für große Deformationen durchgeführt. Grundsätzlich lässt sich diese Theorie auf alle Materialklassen anwenden, bei denen eine Substruktur unabhängig von einer übergeordneten makroskopischen Struktur rotieren darf. In dieser Arbeit konzentriert man sich bei der Anwendung der mikropolaren Theorie auf Materialien, die elastoplastisches Verhalten aufweisen. Darüber hinaus wird die Theorie erstmals mit einem reibungsbehafteten mikropolaren Kontaktmodell erweitert.

Im Einzelnen enthält das Materialmodell für große Deformationen eine neue Formulierung einer nicht-kompatiblen mikropolaren Plastizität. Ausgehend von diesem Modell wird eine Formulierung für kleine Deformationen vorgestellt. Die Plastizitätsmodelle berücksichtigen sowohl isotrope als auch kinematische Verfestigung. Das Kontaktmodell enthält eine besondere Formulierung der klassischen COULOMB'schen Reibung, die erstmals auf mikropolare Reibung verallgemeinert wurde. Alle Modellformulierungen erfüllen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und sind damit thermodynamisch konsistent.

Die entwickelten Materialmodelle wurden im Rahmen der Finite-Elemente-Methode umgesetzt und in geeignete Computerprogramme implementiert. Es wurden insgesamt drei verschiedene Randwertprobleme mit den hier entwickelten Materialmodellen am Computer simuliert. Alle numerischen Beispiele haben qualitativen Charakter und basieren auf angenommenen Materialparametersätzen. Die Rechnungen ohne Kontakt demonstrieren, dass das Modell grundsätzlich in der Lage ist, Längenskaleneffekte wiederzugeben. Was Kontaktprobleme angeht, so war das primäre Ziel, eine Theorie und ihre numerische Umsetzung herauszuarbeiten. Dies ist auch gelungen, wie anhand eines simulierten Eindruckversuchs nachgewiesen wurde.

---

## Abstract

---

In this doctoral thesis constitutive models are presented which take coupling effects between macro- and microscale into account. The theory is able to deal with an increasing influence of microscopic structures on the overall macroscopic behaviour when characteristic problem sizes are decreased. This behaviour is often referred to as length scale effects. The underlying theory is developed under the assumption of large deformation micropolar continuum theory. In principal this kind of theory can be applied to all material classes where a substructure is allowed to independently rotate from the superior macroscopic body. In this work the focus lies on the application of micropolar theory to materials which posses elastoplastic behaviour. Further the theory is generalized in order to derive a constitutive contact model for micropolar friction effects.

In detail the material model includes a new formulation of large deformation micropolar plasticity of non-compatible type. In addition a micropolar plasticity model for small deformation is derived. All plasticity models presented here take isotropic and kinematic hardening

---

into account. The micropolar contact model consists of a particular formulation of the classical COULOMB friction which has been generalized to the micropolar case for the first time. All constitutive models are compatible with the second law of thermodynamics and are therefore thermodynamically consistent.

The developed constitutive models were processed in the framework of the finite element method and implemented into suitable computer programs. Simulations of three different boundary value problems are presented here. These numerical examples are of qualitative nature and based on fictitious material parameter settings. Simulations for single body problems without contact demonstrate the ability of the micropolar plasticity models to describe length scale effects. Concerning contact problems, the foremost aim was the development of a theoretical model and its translation to a numerical solution procedure. The achievement is documented by a simulation of a fictitious indentation test.



---

## Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Ziel der Arbeit . . . . .	5
1.2	Vorwort . . . . .	5
1.3	Notation, Mathematische Hilfsmittel . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Kinematik</b>	<b>11</b>
2.1	Deformation eines Körpers . . . . .	11
2.1.1	Makro- und Mikroskopische Bewegung . . . . .	11
2.1.2	Geschwindigkeiten . . . . .	15
2.1.3	Elastoplastische Zerlegung der Deformation . . . . .	17
2.2	Kontaktkinematik . . . . .	22
2.2.1	Makroskopische Kontaktkinematik . . . . .	22
2.2.2	Mikroskopischer Kontakt . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Thermodynamik</b>	<b>31</b>
3.1	Erster Hauptsatz und Impulsbilanzen . . . . .	33
3.1.1	Entropiebilanz und zweiter Hauptsatz . . . . .	39
3.2	Materialgleichungen für mikropolare Plastizität . . . . .	41
3.2.1	Elastizität . . . . .	42
3.2.2	Das Postulat von ILUSHIN . . . . .	45
3.2.3	Verfestigungsregeln . . . . .	48
3.2.4	Das Materialmodell in der Momentankonfiguration bei kleinen elastischen Verzerrungen . . . . .	54
3.2.5	Das Materialmodell bei kleinen Deformationen . . . . .	57
3.3	Materialgesetze der Kontaktfläche . . . . .	58
3.3.1	Normalkontaktbedingung . . . . .	59
3.3.2	Reibgesetz von COULOMB . . . . .	60
3.3.3	Reibgesetz der Mikrorotation vom COULOMB Typ . . . . .	61
<b>4</b>	<b>FEM</b>	<b>63</b>
4.1	Starke Formulierung eines mikropolaren quasistatischen Randwertproblems . . . . .	63
4.2	Schwache Form, Gesamtfunktional . . . . .	64
4.3	Numerik der Körpervolumen . . . . .	65
4.3.1	Funktionale über das Körpervolumen . . . . .	66
4.3.2	Updated-Lagrange-Methode . . . . .	66
4.3.3	NEWTON-Verfahren, Konsistente Linearisierung . . . . .	67
4.3.4	Prädiktor-Korrektor-Verfahren . . . . .	72
4.3.5	Diskretisierung, Konsistente Tangente und lokales NEWTON-Verfahren . . . . .	75
4.4	Numerik des mikropolaren Kontaktmodells . . . . .	79
4.4.1	Funktionale des Kontaktmodells, Schwache Formen . . . . .	91
4.4.2	Nichtlineare Kontaktbedingungen, Fixpunktverfahren . . . . .	95

---

4.4.3	Linearisierung der Kontaktfunktionale, NEWTON-Verfahren, (i)	103
4.4.4	Diskretisierung der Kontaktformulierung	116
4.4.5	Kleine Kontaktrotationen	118
<b>5</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>123</b>
5.1	Torsion von dünnen Drähten	124
5.1.1	Große Deformationen	126
5.1.2	Kleine Deformationen	126
5.2	Lochplatte unter Zugbelastung	131
5.3	Simulation einer Eindruckbelastung	133
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>141</b>

---

## 1 Einleitung

---

### 1.1 Ziel der Arbeit

---

Das Ziel der Arbeit lässt sich in drei Bereiche gliedern. Zum Einen gilt es, ein mikropolares Modell im Rahmen nicht-kompatibler Plastizität für große Deformationen zu entwickeln. Hiervon ausgehend sollte als zweites Teilziel ein mikropolares Plastizitätsmodell für kleine Deformationen gewonnen werden. In beiden Modellformulierungen sollten jeweils isotrope und kinematische Verfestigung berücksichtigt werden. Schließlich soll ein Kontaktmodell für mikropolare Haftung und Reibung entwickelt werden. Alle Teilziele enthalten eine theoretische Herleitung, eine Umsetzung der Modellgleichungen im Rahmen der Finite- Elemente-Methode, Implementierung in geeigneten Computerprogrammen und Durchführung von Simulationen.

---

### 1.2 Vorwort

---

In der klassischen Mechanik wird davon ausgegangen, dass das Werkstoffverhalten unabhängig von der Bauteilgröße ist. Werden jedoch charakteristische Abmessungen eines Bauteils um Größenordnungen geändert, dann beobachtet man ein mechanisches Verhalten, dass nicht mehr mit klassischen Ansätzen erklärbar ist. Im Allgemeinen wird ein solches Phänomen als Skaleneffekt bezeichnet. Für eine theoretische Beschreibung solcher Effekte existieren bereits zahlreiche Ansätze, wobei es sich meist um Erweiterungen der klassischen Theorie handelt. Eine Möglichkeit, Skaleneffekte in Materialmodellen zu berücksichtigen, stellt die mikropolare Kontinuumstheorie dar. Anschaulich wird davon ausgegangen, dass ein makroskopisch homogener Werkstoff auf mikroskopischer Ebene eine Textur besitzt. Die Bereiche der Substruktur dürfen eigenständige Rotationsbewegungen ausführen. Vorgeschlagen wurde ein solcher Ansatz erstmals von den Brüdern COSSERAT [14].

Experimentell konnten Skaleneffekte vor allem anhand von Torsionsexperimenten mit Proben unterschiedlicher Durchmesser beobachtet werden. Auch in Verbindung mit Eindruckversuchen und Kratztests mit unterschiedlich großen Prüfwerkzeugen wurden solche Effekte dokumentiert. Besteht eine Abhängigkeit von äußeren geometrischen Abmessungen, so spricht man auch von Längenskaleneffekten.

Technologische Fortschritte bei der Miniaturisierung von Bauteilabmessungen erfordern es zunehmend, Längenskaleneffekte in theoretischen Modellen zu berücksichtigen. Experimente und Neuentwicklungen im Mikro- oder Nanometerbereich sind in der Regel aufwändig und mit hohen Kosten verbunden. Mit Vorhersagen aus Modellrechnungen könnten hierbei Einsparungen erzielt werden.

In dieser Arbeit wird ein Materialmodell vorgestellt, bei dem makro- und mikroskopische Längenskalenbereiche miteinander gekoppelt sind. Die Theorie ist in der Lage, bei einem Übergang zu kleineren Problemgebieten den wachsenden Einfluss mikroskopischer Effekte abzubilden. Die Entwicklung des Modells wird im Rahmen einer mikropolaren Kontinuumstheorie für große Deformationen durchgeführt. Grundsätzlich lässt sich diese Theorie auf alle Materialklassen anwenden, bei denen eine Substruktur unabhängig von einer übergeordneten Struktur rotieren darf. In dieser Arbeit konzentriert man sich bei der Anwendung der mikropolaren Theorie auf

---

Materialien, die elastoplastisches Verhalten aufweisen. Als Vorgängerarbeiten sind die Dissertationen von GRAMMENOUDIS [27] und MAKRIDIS [58] zu nennen. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Theorie erstmals mit einem mikropolaren Kontaktmodell erweitert.

Die Arbeit gliedert sich in sechs Kapitel. Das erste Kapitel wird nach diesem Vorwort mit einem Abschnitt über die verwendete Notation zusammen mit einer Übersicht häufig benutzter mathematischer Hilfsmittel abgeschlossen.

Im zweiten Kapitel wird die Kinematik der Modellgleichungen beschrieben. Man beginnt mit der Kinematik der inneren Körpervolumina. Neben den klassischen Deformationen werden mikropolare Rotationen und Krümmungen eingeführt. Es werden daraus die bei mikropolaren Theorien üblichen Verzerrungs- und Krümmungsmaße gewonnen. ERINGEN gibt in [23] eine ausführliche Darstellung einer mikropolaren Kinematik. Er geht dabei zunächst von mikromorphen Kontinua aus und spezialisiert die Theorie dann auf den mikropolaren Fall. Im Anschluss wird die Kinematik bezüglich der Kontaktflächen dargestellt. Bei klassischem Kontakt sind es vor allem die Arbeiten von LAURSEN und WRIGGERS, [50] und [85], in denen ausführlich auf eine klassische Kontaktkinematik eingegangen wird. Im Allgemeinen ist eine Berücksichtigung mikropolarer Freiheitsgrade in der Kontaktfläche nicht neu. ZHANG, WANG, WRIGGERS, und SCHREFLER untersuchen in [87] einen solchen Fall, wobei von kleinen Deformationen und einem ebenen Problem ausgegangen wird. Erstmals wird in der vorliegenden Arbeit eine dreidimensionale mikropolare Kontaktkinematik vollständig unter Voraussetzung großer reibungsbehafteter Deformationen thermodynamisch konsistent hergeleitet. Als überaus ergiebiges Referenzwerk bei der Entwicklung einer solchen generalisierten Kontaktformulierung erwies sich die Publikation von ABBAS [2], die im Rahmen der Dokumentation zu dem FE-Programm *Code\_Aster* erschienen ist.

In Kapitel drei werden die Materialeigenschaften vorgestellt. Grundlage hierfür ist die Thermodynamik. Insgesamt wird der zweite Hauptsatz ständig, d.h. für jeden beliebigen zulässigen Prozess erfüllt. Erstmals wird die Erweiterung eines generalisierten COULOMB'sches Kontaktmodells auf den mikropolaren Fall beschrieben.

Kapitel vier enthält eine Darstellung numerischer Methoden, die zur näherungsweisen Lösung auf die nichtlinearen Gleichungen im Volumen und auf der Kontaktfläche angewendet werden. Hierbei wird das Ziel verfolgt, Gleichungssysteme zu entwickeln, die in geeigneten Computerprogrammen implementiert und mit numerischen Verfahren gelöst werden können. Verwendet wird hierbei die in der Festkörpermechanik übliche Finite-Elemente-Methode, kurz FEM. Bei den Herleitungen der finiten Elemente für die hier entwickelten Modellgleichungen orientiert man sich vor allem an der Publikation von GRAMMENOUDIS und TSAKMAKIS [29]. Es wird eine schwache Form der gekoppelten Bilanzgleichungen eingeführt und die zur Gewinnung von Steifigkeitsmatrizen notwendigen Linearisierungen angegeben. Bei der Umsetzung des mikropolaren Kontaktmodells in eine entsprechende FE-Formulierung diente in hohem Maße die Publikation von ABBAS [2] als Orientierung.

Numerische Experimente und Analysen auf Grundlage des in Kapitel drei entwickelten Materialmodells werden in Kapitel fünf präsentiert. Die Zielsetzung ist nicht eine genaue Wiedergabe einzelner Messwertverläufe realer Experimente, sondern grundsätzlich zu demonstrieren, dass das Modell in der Lage ist, eine Simulation von Längenskaleneffekten wiederzugeben. Dabei spielen weniger absolute Ergebniswerte eine Rolle, vielmehr ist das Änderungsverhalten zwischen unterschiedlichen Problemabmessungen für uns von Bedeutung. Zunächst wird die Simulationen zu Torsionsbelastungen ähnlich wie in den Vorgängerarbeiten von GRAMMENOUDIS [27] und MAKRIDIS [58] durchgeführt, wobei hier sowohl Ergebnisse für große als auch für

kleine Deformationen präsentiert werden. Daran anschließend wird das Randwertproblem einer gelochten Zugplatte simuliert. Neu sind dreidimensionale Kontaktsimulationen mit unabhängigen Rotationsfreiheitsgraden sowohl im Materialvolumen, als auch innerhalb der Kontaktfläche. Hierbei wird ein Randwertproblem simuliert, dass einen sogenannten Eindruckversuch modelliert. Ziel dabei ist nicht, ein reales Eindruckexperiment nachzubilden, sondern zu zeigen, dass das mikropolare Kontaktmodell für Haft- und Rotationsreibung erfolgreich entwickelt und in ein Computerprogramm implementiert wurde.

### 1.3 Notation, Mathematische Hilfsmittel

Wenn nicht anders genannt, werden in dieser Arbeit Tensoren zweiter Stufe kurz als Tensoren bezeichnet. Vektoren und Tensoren werden mit fettgedruckten Symbolen,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  dargestellt.

Die orthonormale Basis im dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum ist gegeben als eine Familie von Einheitsvektoren  $\{\mathbf{e}_i\}$  mit  $i = 1, 2, 3$ . Vektoren und Tensoren lassen sich damit auch in Komponentenschreibweise angeben,  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , wobei  $\otimes$  das dyadische Produkt darstellt. In der gesamten Arbeit wird bei Komponentendarstellungen die EINSTEIN'sche Summenkonvention vorausgesetzt, so dass über Indizes aufsummiert wird, wenn sie in einem Term doppelt auftreten.

Der Einheitstensor zweiter Stufe, hier bezeichnet mit dem Symbol  $\mathbf{1}$ , hat bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  die Komponentendarstellung

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (1.1)$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol mit der Eigenschaft

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.2)$$

symbolisiert. Ein skalares Produkt zwischen zwei Vektoren wird symbolisch mit einem Punkt geschrieben,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . Die Anwendung eines Tensors auf einen Vektor lässt sich komponentenweise ausdrücken,

$$\mathbf{A}[\mathbf{a}] = A_{ij} a_j \mathbf{e}_i. \quad (1.3)$$

Ein tensorielles Produkt liefert wieder einen Tensor,  $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ . Die Euklidische Norm eines Vektors bzw. eines Tensors ist gegeben durch

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad (1.4)$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}, \quad (1.5)$$

wobei das innere Produkt bezüglich Tensoren ebenfalls mit einem Punkt geschrieben wird. Die Transposition eines Tensors ist definiert als

$$\mathbf{A}^T = A_{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i. \quad (1.6)$$

Jeder Tensor lässt sich additiv in einen symmetrischen Anteil mit  $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_S^T$ ,

$$\mathbf{A}_S := \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad (1.7)$$

und einen antisymmetrischen Anteil mit  $\mathbf{A}_A = -\mathbf{A}_A^T$ ,

$$\mathbf{A}_A := \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (1.8)$$

zerlegen. Bei der Spur eines Tensors wird den Koordinaten seiner Hauptdiagonalen eine skalare Zahl zugeordnet. Man führt die Spur über die Gleichung

$$\text{Sp}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.9)$$

ein. Antisymmetrische Tensoren besitzen maximal drei unabhängige Komponenten. Über einen Operator, hier symbolisiert mit  $\text{axl}(\cdot)$ , lässt sich demnach einem antisymmetrischen Tensor  $\mathbf{W}$  ein Vektor zuordnen,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \text{axl}(\mathbf{W}), \\ w_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{kj}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Es ist üblich,  $\mathbf{w}$  als axialen Vektor zu bezeichnen. Umgekehrt kann man einem axialen Vektor einen antisymmetrischen Tensor zuordnen. Verwendet wird hierfür das Symbol  $\text{spn}(\cdot)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \text{spn}(\mathbf{w}), \\ W_{ji} &= \varepsilon_{ijk} w_k. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Die Komponentendarstellungen in (1.10) und in (1.11) enthalten das Permutationssymbol  $\varepsilon_{ijk}$  mit der Eigenschaft

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{gerade Permutation,} \\ -1, & \text{ungerade Permutation,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Wie die Spur bildet auch die Determinante Koordinaten eines Tensors auf einen Skalar ab. Man kann zeigen, dass ein Zusammenhang zum Permutationssymbol besteht,  $\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}$ . Bezüglich eines allgemeinen Tensors  $\mathbf{A}$  besitzt das Permutationssymbol  $\varepsilon_{ijk}$  die Eigenschaft  $\varepsilon_{ijk} A_{il} A_{jm} A_{kn} = \varepsilon_{lmn} \det(\mathbf{A})$ . In Verbindung mit dem Kreuzprodukt  $\times$ , dass die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} A_{il} b_j \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (1.14)$$

besitzt, lässt sich ein weiterer Zusammenhang von antisymmetrischen Tensoren und axialen Vektoren anhand der Gleichung

$$\mathbf{W}[\mathbf{r}] = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad (1.15)$$

ausdrücken, wobei  $\mathbf{r}$  einen beliebigen Vektor darstellt.

Eigentlich orthogonale Abbildungen  $\mathbf{Q}$  mit der Eigenschaft  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$  und  $\det(\mathbf{Q}) = 1$  können durch eine Exponentialreihe ersetzt werden,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \mathbf{W} + \frac{\mathbf{W}^2}{2!} + \frac{\mathbf{W}^3}{3!} + \dots \quad (1.16)$$

$$= \exp(\mathbf{W}), \quad (1.17)$$

die aus Potenzen antisymmetrischer Tensoren  $\mathbf{W}$  gebildet wird. Eine geschlossene Form der Gleichung (1.16) ist als EULER-RODRIGUES-Formel bekannt,

$$\mathbf{Q} = \cos(\|\mathbf{w}\|) \mathbf{1} + \frac{\sin(\|\mathbf{w}\|)}{\|\mathbf{w}\|} \text{spn}(\mathbf{w}) + \frac{1 - \cos(\|\mathbf{w}\|)}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}. \quad (1.18)$$

Dreistufige Tensoren werden in der Regel mit kalligraphischen Symbolen,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  usw. bezeichnet. Bezüglich einer orthonormalen Basis besitzt  $\mathcal{A}$  die Komponentendarstellung  $\mathcal{A}_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ . Man definiert eine symbolische Verknüpfung  $\diamond$  zwischen einem dreistufigen Tensor  $\mathcal{A}$  und einem Tensor  $\mathbf{A}$  mit der Eigenschaft

$$\mathcal{A} \diamond \mathbf{A}^T = \mathcal{A}_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{A}[\mathbf{e}_j] \otimes \mathbf{e}_k. \quad (1.19)$$

Es wird bezüglich dreistufiger Tensoren darüber hinaus ein linearer Operator  $\mathcal{L}$  eingeführt, so dass

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})[\mathcal{A}] = \mathcal{A}_{ijk} \mathbf{A}[\mathbf{e}_i] \otimes \mathbf{B}[\mathbf{e}_j] \otimes \mathbf{C}[\mathbf{e}_k]. \quad (1.20)$$

Vierstufige Tensoren werden mit Doppelvertikalen gekennzeichnet,  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ , usw. Der Einheits-tensor vierter Stufe hat die Komponentendarstellung

$$\mathbb{I} = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (1.21)$$

Man definiert darüber hinaus weitere vierstufige Tensoren, die bei Anwendung auf allgemeine Tensoren die Eigenschaften

$$\mathbb{I}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}, \quad (1.22)$$

$$\mathbb{I}^{vol}[\mathbf{A}] = Sp(\mathbf{A}), \quad (1.23)$$

$$\mathbb{I}^{trans}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}^T, \quad (1.24)$$

$$\mathbb{I}^{sym}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad (1.25)$$

$$\mathbb{I}^{asym}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (1.26)$$

besitzen. Die Komponentendarstellungen ergeben sich aus (1.23) bis (1.26) in Form der Darstellungen

$$\mathbb{I}^{vol} = \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (1.27)$$

$$\mathbb{I}^{trans} = \delta_{il} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (1.28)$$

$$\mathbb{I}^{sym} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (1.29)$$

$$\mathbb{I}^{asym} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (1.30)$$

Ein allgemein isotroper Tensor vierter Stufe besitzt die Darstellung

$$\mathbb{A} = \lambda \mathbb{I}^{vol} + (\mu + \nu) \mathbb{I} + (\mu - \nu) \mathbb{I}^{trans}, \quad (1.31)$$

bzw.  $\mathbb{A} = \lambda \mathbb{I}^{vol} + \mu \mathbb{I}^{sym} + \nu \mathbb{I}^{asym}$ . Ausgehend von (1.31) lassen sich weitere Tensoren einführen. Den Deviatoranteil eines allgemeinen Tensors liefert zum Beispiel

$$\mathbb{D} := -\frac{1}{3} \mathbb{I}^{vol} + \mathbb{I}, \quad (1.32)$$

$$\epsilon^D = \mathbb{D}[\epsilon], \quad (1.33)$$

wobei in der zweiten Gleichung (1.33) für den Deviator die Bezeichnung  $(\cdot)^D$  eingeführt wird. Vernachlässigt man den volumetrischen Anteil, dann erhält man über

$$\mathbb{S} := (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbb{I} + (\alpha_1 - \alpha_2) \mathbb{I}^{trans} \quad (1.34)$$

$$\mathbb{H} := \mathbb{S} \mathbb{D} \quad (1.35)$$

einen neuen Tensor  $\mathbb{H}$ , der bei Anwendung auf zweistufige Tensoren  $\epsilon$  einen allgemeinen Deviator  $\xi^D$  liefert

$$\mathbb{H} = -\frac{2}{3} \alpha_1 \mathbb{I}^{vol} + (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbb{I} + (\alpha_1 - \alpha_2) \mathbb{I}^{trans}, \quad (1.36)$$

$$\xi^D = \mathbb{H}[\epsilon]. \quad (1.37)$$



---

## 2 Kinematik

---

Für die geometrische Beschreibung physikalischer Phänomene verschiedener Längenskalen gilt es, geeignete kinematische Größen einzuführen. In einer ersten Einteilung unterscheidet man zwischen Deformationsmaßen innerhalb eines Körpers und den relativen Bewegungsgrößen bei Kontaktvorgängen von mindestens zwei Körper. Aus physikalischen Gründen ist eine weitere Unterscheidung in reversible und dissipative Bewegungsanteile sinnvoll.

Für weiterführende Literatur zu Tensorrechnung und Differentialgeometrie siehe zum Beispiel KLINGBEIL [46], SCHADE [67], RASHEVSKI [65], SCHUTZ [70] und MARSDEN, HUGHES [59].

---

### 2.1 Deformation eines Körpers

---

Ein Körper wird als eine Menge von materiellen Teilchen betrachtet. Um die Deformationen eines Körpers zu beschreiben, wird jedes Teilchen mit Freiheitsgraden ausgestattet. In der klassischen Mechanik besitzt jedes Teilchen gemäß der drei Raumrichtungen drei Freiheitsgrade der Verschiebung. Bei mikropolaren Materialien wird jedes Teilchen zusätzlich mit drei unabhängigen Rotationen ausgestattet.

---

#### 2.1.1 Makro- und Mikroskopische Bewegung

---

Die materiellen Teilchen eines Körpers  $\mathcal{B}$  nehmen zu einem Zeitpunkt  $t$  einen Bereich  $\mathcal{R}_t$  des dreidimensionalen euklidischen Punktraumes  $\mathcal{E}$  ein. Der Bereich  $\mathcal{R}_t$  wird als Momentankonfiguration bezeichnet. Die Konfiguration, die der Körper zur festen Zeit  $t = 0$  besitzt, wird Referenzkonfiguration,  $\mathcal{R}_R$  genannt. Es wird damit nicht zwischen einer Referenz- und einer Anfangskonfiguration unterschieden. Da materielle Teilchen über ihre Position zu einem bestimmten Zeitpunkt referenziert werden, werden die Bezeichnungen “Teilchen” und “Punkt” als gleichberechtigt behandelt.

Zur Beschreibung von Materialien mit Substruktur wird an jedem Punkt des Körpers ein Mikrokontinuum angeheftet, siehe ERINGEN [22], ERINGEN und SUHUBI [25]. Die Konfiguration, die ein Mikrokontinuum zum Zeitpunkt  $t$  und  $t = 0$  einnimmt, wird mit  $\mathcal{R}'_t$  und  $\mathcal{R}'_R$  bezeichnet.

Die materiellen Teilchen der Makro- und der Mikrokontinua besitzen zum Zeitpunkt  $t$  die Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  und  $\varphi$ . In der Referenzkonfiguration nehmen die Teilchen jeweils die Positionen  $\mathbf{X}$  und  $\Phi$  ein. Man denkt sich die Ortsvektoren eines Mikrokontinuums  $\varphi$  bzw.  $\Phi$  stets an einem materiellen Teilchen  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{X}$  des Makrokontinuums angeheftet. Dabei besteht eine allgemeine Abhängigkeit, die durch die Funktionen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (2.1)$$

$$\varphi = \varphi(\mathbf{X}, \Phi, t) \quad (2.2)$$

ausgedrückt werden kann. Die Abbildung (2.1) wird als Makrobewegung, die Abbildung (2.2) als Mikrobewegung bezeichnet. Der makroskopische Verschiebungsvektor ist definiert als die Differenz

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.3)$$

Deformationsmaße lassen sich über die Definitionsgleichungen

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{und} \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{R}} := \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \quad (2.5)$$

eingeführen. Die Größe  $\mathbf{F}$  bezeichnet den klassischen Deformationsgradienten,  $\bar{\mathbf{R}}$  bezeichnet den Tensor einer Mikrorotation. Für den Deformationsgradienten existiert eine polare Zerlegung:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}. \quad (2.6)$$

Die Tensoren  $\mathbf{R}$  und  $\bar{\mathbf{R}}$  stellen jeweils eigentlich orthogonale Abbildungen dar, so dass  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ,  $\bar{\mathbf{R}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}}^T$  und  $\det \mathbf{R} = \det(\bar{\mathbf{R}}) = 1$ . Die als Strecktensoren bezeichneten Größen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  besitzen die Eigenschaft der Symmetrie,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$  und  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$ , und sind positiv definit. Der Deformationsgradient besitzt eine weitere Zerlegung

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{R}}, \quad (2.7)$$

wobei mikropolare Strecktensoren anhand der Definitionen

$$\bar{\mathbf{U}} := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}, \quad (2.8)$$

$$\bar{\mathbf{V}} := \mathbf{F} \bar{\mathbf{R}}^T \quad (2.9)$$

explizit eingeführt werden können, siehe hierzu auch ERINGEN und KAFADAR [24]. Die Tensoren  $\bar{\mathbf{U}}$  und  $\bar{\mathbf{V}}$  sind im Gegensatz zu klassischen Strecktensoren im Allgemeinen nicht symmetrisch. Die Deformationsmaße besitzen die Eigenschaften

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} [d\mathbf{X}], \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \bar{\mathbf{R}} [\boldsymbol{\Phi}]. \quad (2.11)$$

Gleichung (2.10) drückt die Eigenschaft des Deformationsgradienten aus, ein materielles Linienelement  $d\mathbf{X}$  aus der Referenzkonfiguration in einen Vektor  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration zu überführen. Die Mikrorotation stellt genau wie der Deformationsgradient ein Zweipunkttensorfeld mit der Eigenschaft dar, einen Vektor  $\boldsymbol{\Phi}$  aus der Referenzkonfiguration in einen Vektor der Momentankonfiguration  $\boldsymbol{\varphi}$  zu überführen, Gleichung (2.11). Die Mikrorotation beschreibt demnach eine unabhängige Starrkörperrotation, die an jedem Teilchen des Makrokontinuums angeheftet ist.

Aus Gleichung (2.10) lässt sich die Transformationsvorschrift zwischen makroskopischen Volumenelementen der Referenzkonfiguration  $dV$  und Momentankonfiguration  $dv$  herleiten. Mit der Definition  $J := \det(\mathbf{F})$  erhält man eine kompakte Darstellung in Form der Transformationsbeziehung

$$dv = J dV. \quad (2.12)$$

Die Transformation von vektoriellen Flächenelementen  $d\mathbf{a}$  und  $d\mathbf{A}$  zwischen Momentan- und Referenzkonfiguration des Makrokontinuums ist als Formel von Nanson bekannt,

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^T d\mathbf{A}. \quad (2.13)$$

Wird nur der Betrag von Flächenelementen betrachtet, so ergibt sich mit der Definition

$$j := J \|\mathbf{F}^{\text{T}^{-1}} [\mathbf{N}]\| \quad (2.14)$$

eine Transformationsbeziehung in der Darstellung

$$da = j dA. \quad (2.15)$$

Der Vektor  $\mathbf{N}$  stellt einen Normalenvektor in der Referenzkonfiguration dar. Aus physikalischen Gründen sind nur Werte  $J > 0$  und  $j > 0$  sinnvoll. Mikrokontinua lassen sich ebenfalls Volumen  $V'$  und  $v'$  bezüglich der Konfigurationen  $\mathcal{R}'_R$  und  $\mathcal{R}'_t$  zuweisen. Analog der makroskopischen Transformationsbeziehung (2.12) gilt mit der Bedingung  $\det(\bar{\mathbf{R}}) = 1$  der Zusammenhang

$$v' = V' \quad \text{und} \quad dv' = dV'. \quad (2.16)$$

---

### Verzerrungsmaße

---

Für die Entwicklung geeigneter Verzerrungsmaße in Makro- und Mikrokontinuum führt man zunächst beliebige Vektoren  $d\mathbf{X}$  und  $\Phi_i$  mit  $i = 0, 1, 2$  in den Referenzkonfigurationen ein. Es werden die Eigenschaften (2.10) und (2.11) benutzt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}[d\mathbf{X}], \quad \varphi_i = \bar{\mathbf{R}}[\Phi_i]. \quad (2.17)$$

Man erhält auf die Momentankonfigurationen transformierte Vektoren  $d\mathbf{x}$  und  $\varphi_i$ . Nachfolgend wird die einfache Schreibweise  $\Phi_0 \equiv \Phi$  und  $\varphi_0 \equiv \varphi$  verwendet. Änderungen, die die Vektoren aufgrund einer Makro- und Mikrodeformation erfahren, lassen sich durch skalare Differenzmaße erfassen. In Analogie zu GRAMMENOUDES [27] führt man zwei skalare Differenzen über die Definitionen

$$\Delta := \varphi \cdot d\mathbf{x} - \Phi \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.18)$$

$$\Delta_c := \varphi_1 \cdot \text{grad} \varphi_2 [d\mathbf{x}] - \Phi_1 \cdot \text{Grad} \Phi_2 [d\mathbf{X}] \quad (2.19)$$

ein. Nach einer Gleichungsumformung unter Berücksichtigung der Transformationsbeziehungen (2.17) erhält man aus den Definitionsgleichungen (2.18) und (2.19) die Ausdrücke

$$\Delta = \Phi \cdot (\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{1}) [d\mathbf{X}] = \varphi \cdot (\mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1}) [d\mathbf{x}], \quad (2.20)$$

$$\Delta_c = \Phi_1 \cdot \left( \bar{\mathbf{R}}^{\text{T}} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{X}} [\Phi_2] \right) [d\mathbf{X}] = \varphi_1 \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{x}} \diamond (\bar{\mathbf{R}}^{\text{T}} [\varphi_2]) [d\mathbf{x}], \quad (2.21)$$

wobei noch die Definitionen (2.8) und (2.9) berücksichtigt wurden. Anhand der Gleichungen (2.20) und (2.21) lassen sich mikropolare Verzerrungs- und Krümmungsmaße sowohl in der Referenz- als auch in der Momentankonfiguration einführen:

$$\tilde{\epsilon} := \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{1}, \quad (2.22)$$

$$\epsilon := \mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1}, \quad (2.23)$$

$$\tilde{\mathcal{K}} := \bar{\mathbf{R}}^{\text{T}} \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{K} := \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{x}} \diamond \bar{\mathbf{R}}^{\text{T}}. \quad (2.25)$$

In den allermeisten Fällen werden die Größen bezüglich der Referenzkonfiguration mit einer Tilde gekennzeichnet, so dass  $\tilde{\epsilon}$  und  $\tilde{\mathcal{K}}$  die mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungsmaße auf der Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}_R$  darstellen. In Bezug zu kartesischen Koordinaten kann gezeigt werden, dass die mikropolare Krümmung  $\tilde{\mathcal{K}}$  bzw.  $\mathcal{K}$  sowohl in Referenz- als auch in Momentankonfiguration bezüglich der ersten beiden Indizes antisymmetrisch ist. Diese Eigenschaft kann man ausnutzen, indem aus den Tensoren dritter Stufe zweistufige axiale Tensoren gebildet werden,

$$\tilde{K}_{il} := \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \tilde{\mathcal{K}}_{kjl}, \quad (2.26)$$

$$K_{il} := \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{K}_{kjl}. \quad (2.27)$$

Mit den Definitionen (2.22) bis (2.27) und dem Kreuzprodukt in der Darstellung (1.14) lassen sich die skalaren Differenzen nach längerer Rechnung durch die Gleichungen

$$\Delta = \varphi \cdot \epsilon [d\mathbf{x}] = \Phi \cdot \tilde{\epsilon} [d\mathbf{X}] \quad \text{und} \quad (2.28)$$

$$\Delta_c = \varphi_1 \cdot (\mathbf{K} \times \varphi_2) [d\mathbf{x}] = \Phi_1 \cdot (\tilde{\mathbf{K}} \times \Phi_2) [d\mathbf{X}] \quad (2.29)$$

ausdrücken. Es kann gezeigt werden, dass eine Transformation der Verzerrungen und Krümmungen zwischen Referenz- und Momentankonfiguration auf die Beziehungen

$$\epsilon = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\epsilon} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.31)$$

führt. Aus den verwendeten Zweipunktensoren in den Vektortransformationen (2.17) und der Definition der skalaren Differenz  $\Delta_c$  ergibt sich ebenfalls das Transformationsverhalten der dreistufigen Krümmungstensoren. In einer Darstellung unter Verwendung des linearen Operators (1.20) erhält man den Zusammenhang

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} \left( \bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}-1} \right) [\tilde{\mathcal{K}}]. \quad (2.32)$$

Die Transformationsbeziehung (2.32) liefert auf beiden Konfigurationen  $\mathcal{R}_R$ ,  $\mathcal{R}_t$  Krümmungsmaße, die echte Gradienten enthalten. Man bezeichnet dabei Operatoren grad und Grad, die ein Transformationsverhalten

$$\text{grad} \mathbf{b} = \text{Grad} \mathbf{b} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.33)$$

aufweisen als echte Gradienten. Der Operator grad stellt demnach einen echten Gradienten der Momentankonfiguration dar. Der Operator Grad bezeichnet in Gleichung (2.33) einen echten Gradienten auf der Referenzkonfiguration. Die Größe  $\mathbf{b}$  ist ein beliebiger Vektor. Im Unterschied zu echten Gradienten lässt sich anhand einer inkompatiblen, lokalen Deformation  $\Psi$ , vgl. NOLL [62] und GRAMMENOUDES und TSAKMAKIS [32], ein relativer Gradient definieren,

$$\nabla_{\Psi} \mathbf{b} = \text{Grad} \mathbf{b} \Psi^{-1}. \quad (2.34)$$

In mikropolaren Theorien stellt zum Beispiel der Tensor der Mikrorotation eine lokale Deformation dar, so dass aus einer Transformationgleichung  $\nabla_{\bar{\mathbf{R}}} \mathbf{b} := \text{Grad} \mathbf{b} \bar{\mathbf{R}}^T$  ein relativer Gradient auf der Momentankonfiguration hervorgeht. In früheren Arbeiten, siehe GRAMMENOUDES [27] und MAKRIDIS [58], wurde ein Operator für die Transformation eines mikropolaren Krümmungsmaßes verwendet, der sich von  $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{F}}^{T-1})$  in Gleichung (2.32) unterscheidet. In GRAMMENOUDES [27] wird von einem Krümmungsmaß ausgegangen, dass in der Referenzkonfiguration einen echten Gradienten enthält. Die *push-forward*-Transformation wird dann mit einem Operator

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}) [\tilde{\mathcal{K}}] \quad (2.35)$$

durchgeführt. Der Operator in (2.35) führt auf eine Krümmung  $\mathcal{K}^*$ , die nun mit einem relativen Gradienten in der Momentankonfiguration gebildet wird. Der umgekehrte Fall wird in MAKRIDIS [58] untersucht. Hier wird ein echter Gradient bei der Einführung des Krümmungsmaßes in der Momentankonfiguration verwendet und über die Transformation

$$\tilde{\mathcal{K}}^* = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}^T, \bar{\mathbf{R}}^T, \bar{\mathbf{R}}^T) [\mathcal{K}] \quad (2.36)$$

auf eine Krümmung in der Referenzkonfiguration zurückgeführt. Dabei entsteht ein Krümmungsmaß  $\tilde{\mathcal{K}}^*$ , dass nun in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}_R$  einen relativen Gradienten enthält.

---

### 2.1.2 Geschwindigkeiten

---

Die Geschwindigkeit eines makroskopischen Punktes ist definiert als die materielle Zeitableitung der Bewegung,

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.37)$$

In Definition (2.37) bezeichnet  $\mathbf{V}$  den Geschwindigkeitsvektor in Lagrange'scher und  $\mathbf{v}$  in EULER'scher Darstellung. Eine Zeitableitung des Deformationsgradienten liefert zunächst die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}. \quad (2.38)$$

Die Ortsableitung des Geschwindigkeitsvektor in Gleichung (2.38) wird als Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  bezeichnet,

$$\mathbf{L} := \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.39)$$

Aus der zeitlichen Ableitung (2.38) zusammen mit Definition (2.39) ergibt sich sofort

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.40)$$

Wenn man auf Gleichung (2.10) zurückgreift, dann kann gezeigt werden, dass der Geschwindigkeitsgradient die Änderungsrate eines Linienelementes auf das Linienelement selbst zurückführt,

$$(d\mathbf{x})' = \mathbf{L}[d\mathbf{x}], \quad (2.41)$$

wobei für Linienelemente eine übliche Notation verwendet wird. Bei der Untersuchung der Änderungsrate mikroskopischer Rotationsbewegungen geht man von Gleichung (2.11) aus, bilden die materielle Zeitableitung und erhält den Zusammenhang

$$\dot{\varphi} = \dot{\bar{\mathbf{R}}}[\Phi]. \quad (2.42)$$

Der Vektor der Referenzkonfiguration lässt sich durch eine Rücktransformation  $\Phi = \bar{\mathbf{R}}^T[\varphi]$  ersetzen. Es ist sinnvoll, analog zu Gleichung (2.40) über die Definition

$$\boldsymbol{\Omega} := \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T \quad (2.43)$$

einen mikroskopischen Spintensor  $\boldsymbol{\Omega}$  einzuführen. Es kann gezeigt werden, dass der Spintensor antisymmetrisch ist, so dass  $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T$  gilt. Damit lässt sich dem Spin  $\boldsymbol{\Omega}$  ein axialer Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  zuordnen,

$$\boldsymbol{\omega} := \text{axl}(\boldsymbol{\Omega}), \quad (2.44)$$

wobei  $\boldsymbol{\omega}$  eine mikroskopische Winkelgeschwindigkeit angibt. Aus Definition (2.43) ergibt sich die Eigenschaft des mikropolaren Spintensors, einem beliebigen Vektor  $\varphi$  der Momentankonfiguration seine Änderungsrate

$$\dot{\varphi} = \boldsymbol{\Omega}[\varphi] \quad (2.45)$$

zuzuordnen.

---

## Objektive Geschwindigkeiten

---

Es wird gefordert, dass die Raten einer Deformation von Beobachtern unabhängig sein sollen. Geschwindigkeitsmaße, die diese Bedingung erfüllen, werden als objektiv bezeichnet. Man kann zeigen, dass forminvariante Darstellungen von  $\dot{\Delta}$  und  $\dot{\Delta}_c$  auf objektive Ableitungen von mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungsmaßen führen (siehe z.B. HAUPT und TSAKMAKIS [37] und [38]). Insbesondere gilt

$$\dot{\Delta} = \varphi \cdot \overset{\Delta}{\epsilon} [d\mathbf{x}], \quad (2.46)$$

$$\dot{\Delta}_c = \varphi_1 \cdot \left( \overset{\Delta}{\mathbf{K}} \times \varphi_2 \right) [d\mathbf{x}], \quad (2.47)$$

wobei objektive Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten anhand der Gleichungen

$$\overset{\Delta}{\epsilon} := \dot{\epsilon} + \epsilon \mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega} \epsilon \quad \text{und} \quad (2.48)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{K}} := \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K} \mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{K} \quad (2.49)$$

definiert werden. Mit den Definitionen (2.48), (2.49) und den zeitlichen Ableitungen der Gleichungen (2.30), (2.31) lassen sich die *push-forward*-Transformationen der Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten bestimmen,

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\epsilon}} = \bar{\mathbf{R}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{F}^{-1}, \quad (2.50)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.51)$$

Eine zeitliche Ableitung der mikropolaren Zerlegung des Deformationsgradienten, Gleichung (2.7), führt zusammen mit den Gleichungen (2.50) und (2.40) auf die Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L} = \overset{\Delta}{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.52)$$

wobei man berücksichtigt, dass  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\bar{\mathbf{U}}}$  gilt. Der Geschwindigkeitsgradient spaltet sich nach Gleichung (2.52) additiv in eine objektive mikropolare Verzerrungsgeschwindigkeit und einen mikropolaren Spin auf.

### 2.1.3 Elastoplastische Zerlegung der Deformation

Im Fall von großen Deformationen ist ein üblicher Ansatz, den Deformationsgradienten in elastische und plastische Deformationsanteile multiplikativ zu zerlegen (siehe z.B. KRÖNER [48], LEE und LIU [52] and LEE [51]),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p. \quad (2.53)$$

Zerlegung 2.53 ist gleichbedeutend mit der Einführung einer Zwischenkonfiguration  $\mathcal{R}_t$ . Wenn der Vektor  $d\hat{\mathbf{x}}$  ein Linienelement in der Zwischenkonfiguration darstellt, dann besitzen die Deformationsanteile  $\mathbf{F}_p$  und  $\mathbf{F}_e$  die Eigenschaften

$$d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_p [d\mathbf{X}], \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F}_e [d\hat{\mathbf{x}}]. \quad (2.54)$$

Der plastische Deformationsgradient  $\mathbf{F}_p$  transformiert demnach ein Linienelement aus der Referenzkonfiguration in ein entsprechendes Element in der Zwischenkonfiguration. Der elastische Anteil  $\mathbf{F}_e$  transformiert Linienelemente aus der Zwischen- in die Momentankonfiguration. Aus den Transformationseigenschaften (2.54) wird deutlich, dass sowohl das plastische als auch elastische Deformationsmaß bezüglich einer Zwischenkonfiguration Zweipunktensortfelder darstellen.

Es wird darüber hinaus gefordert, dass transformierte Volumenelemente stets positiv bleiben, so dass  $\det(\mathbf{F}_e) > 0$  gilt. Mit der Bedingung  $\det(\mathbf{F}) > 0$  folgt sofort auch die Einschränkung  $\det(\mathbf{F}_p) > 0$ .

In Analogie zu der polaren Zerlegung der Gesamtdeformation, Gleichung (2.6), lassen sich elastische und plastische Deformationsanteile zerlegen in

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \quad \text{und} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p \mathbf{R}_p. \quad (2.56)$$

In Gleichungen (2.55) und (2.56) stellen die Feldgrößen  $\mathbf{R}_e$  und  $\mathbf{R}_p$  eigentlich orthogonale Tensoren dar. Wie im Fall der polaren Zerlegung des gesamten Deformationsgradienten besitzen die Strecktensoren  $\mathbf{U}_p$ ,  $\mathbf{U}_e$ ,  $\mathbf{V}_p$  und  $\mathbf{V}_e$  die Eigenschaft der Symmetrie und sind positiv definit. Wird die Zerlegung (2.53) zeitlich abgeleitet, so folgt unmittelbar, dass sich der Geschwindigkeitsgradient additiv aus elastoplastischen Anteilen zusammensetzt, so dass

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{L}}_p (\mathbf{F}_e)^{-1}, \quad (2.57)$$

mit den Definitionen

$$\mathbf{L}_e := \dot{\mathbf{F}}_e (\mathbf{F}_e)^{-1}, \quad (2.58)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_p := \dot{\mathbf{F}}_p (\mathbf{F}_p)^{-1}. \quad (2.59)$$

Es wird STEINMANN [74] gefolgt, indem der Ansatz einer multiplikativen Zerlegung auch für die Mikrorotation verwendet wird:

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p. \quad (2.60)$$

Elastische und plastische mikroskopische Rotationstensoren werden dabei mit  $\bar{\mathbf{R}}_e$  und  $\bar{\mathbf{R}}_p$  bezeichnet. Auch die elastoplastischen Anteile in Gleichung (2.60) stellen in Verbindung mit einer Zwischenkonfiguration Zweipunktensoren dar. Man kann somit neben einem Linienelement  $d\hat{\mathbf{x}}$  weitere Vektoren  $\hat{\varphi}_i$  mit  $i = 0, 1, 2$  in der Zwischenkonfiguration einführen und die Transformationseigenschaft der elastischen und plastischen mikropolaren Rotation zusammenfassen:

$$\hat{\varphi}_i = \bar{\mathbf{R}}_p [\Phi_i], \quad \varphi_i = \bar{\mathbf{R}}_e [\hat{\varphi}_i]. \quad (2.61)$$

Für  $\hat{\varphi}_0$  wird im Folgenden kurz  $\hat{\varphi}$  geschrieben. Eine Aufteilung in elastische und plastische Rotationsanteile wirkt sich auch auf die Zusammensetzung des mikropolaren Spins aus. Mit den Definitionen

$$\Omega_e := \dot{\bar{\mathbf{R}}}_e (\bar{\mathbf{R}}_e)^T, \quad (2.62)$$

$$\hat{\Omega}_p := \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p (\bar{\mathbf{R}}_p)^T \quad (2.63)$$

ergibt sich die Gleichung

$$\Omega = \Omega_e + \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\Omega}_p (\bar{\mathbf{R}}_e)^T, \quad (2.64)$$

die eine ähnliche Struktur wie die additiven Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten in Gleichung (2.57) besitzt.

Eine “mikropolare Zerlegung” der Gesamtdeformation wurde in Gleichung (2.7) bereits eingeführt. Man erweitert diesen Ansatz auch auf jeweils elastische und plastische Anteile,  $\mathbf{F}_e$  und  $\mathbf{F}_p$ . Daraus ergibt sich eine Einführung elastischer und plastischer mikropolarer Strecktensoren in den Gleichungen

$$\mathbf{F}_e = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{U}}_e = \bar{\mathbf{V}}_e \bar{\mathbf{R}}_e \quad \text{und} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{F}_p = \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{U}}_p = \bar{\mathbf{V}}_p \bar{\mathbf{R}}_p, \quad (2.66)$$



bzw. explizit durch die Definitionen

$$\bar{\mathbf{U}}_p := (\bar{\mathbf{R}}_p)^T \mathbf{F}_p \quad \text{auf } \mathcal{R}_R, \quad (2.67)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_e := (\bar{\mathbf{R}}_e)^T \mathbf{F}_e, \quad \bar{\mathbf{V}}_p := \mathbf{F}_p (\bar{\mathbf{R}}_p)^T \quad \text{auf } \hat{\mathcal{R}}_t, \quad (2.68)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_e := \mathbf{F}_e (\bar{\mathbf{R}}_e)^T \quad \text{auf } \mathcal{R}_t. \quad (2.69)$$

Es sollen nun auch auf der Zwischenkonfiguration Maße der Verzerrungen und Krümmungen bereitgestellt werden. Dafür drückt man die skalaren Differenzen (2.18) und (2.19) durch Größen der Zwischenkonfiguration aus,

$$\Delta = \hat{\varphi} \cdot (\bar{\mathbf{U}}_e - (\bar{\mathbf{V}}_p)^{-1}) [d\hat{\mathbf{x}}], \quad (2.70)$$

$$\Delta_c = \hat{\varphi}_1 \cdot \left\{ (\bar{\mathbf{R}}_e^T \nabla_{\bar{\mathbf{R}}_p} \bar{\mathbf{R}}_e + \nabla_{\bar{\mathbf{R}}_p} \bar{\mathbf{R}}_p \diamond \bar{\mathbf{R}}_p^T) [\hat{\varphi}_2] \right\} [d\hat{\mathbf{x}}]. \quad (2.71)$$

Dabei stellt  $\nabla_{\bar{\mathbf{R}}_p}$  einen relativen Gradienten, definiert durch  $\nabla_{\bar{\mathbf{R}}_p} \mathbf{b} := \text{Grad} \mathbf{b} \bar{\mathbf{R}}_p^T$ , dar. Über die Klammerausdrücke in diesen Gleichungen lassen sich die Definitionsgleichungen der Verzerrungen und Krümmungen auf der Zwischenkonfiguration gewinnen,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} := \bar{\mathbf{U}}_e - (\bar{\mathbf{V}}_p)^{-1}, \quad (2.72)$$

$$\hat{\mathcal{K}} := \bar{\mathbf{R}}_e^T \nabla_{\bar{\mathbf{R}}_p} \bar{\mathbf{R}}_e + \nabla_{\bar{\mathbf{R}}_p} \bar{\mathbf{R}}_p \diamond \bar{\mathbf{R}}_p^T. \quad (2.73)$$

Der dreistufige Tensor  $\hat{\mathcal{K}}$  besitzt ähnliche anti-symmetrische Eigenschaften wie die Tensoren  $\tilde{\mathcal{K}}$  und  $\mathcal{K}$  und kann damit durch einen zweistufigen axialen Tensor  $\hat{\mathbf{K}}$  ausgedrückt werden (siehe dazu das analoge Vorgehen in den Arbeiten GRAMMENOUDIS [27] und MAKRIDIS [58]):

$$\hat{\mathbf{K}} \text{ ist axialer Tensor zu } \hat{\mathcal{K}}. \quad (2.74)$$

Die skalare Differenz (2.71) kann damit auch durch Gleichung

$$\Delta_c = \hat{\varphi}_1 \cdot (\hat{\mathbf{K}} \times \hat{\varphi}_2) [d\hat{\mathbf{x}}] \quad (2.75)$$

ausgedrückt werden. Mit den Definitionen (2.72) und (2.73), (2.74) stehen die Gleichungen der *push-forward*-Transformationen aus der Referenzkonfiguration auf die Zwischenkonfiguration fest,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \bar{\mathbf{R}}_p \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{F}_p^{-1}, \quad (2.76)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{R}}_p \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{F}_p^{-1}. \quad (2.77)$$

Anhand der zeitlichen Ableitungen der skalaren Differenzen bezüglich der Zwischenkonfiguration, Gleichungen (2.70) und (2.71) bzw. (2.75), können die objektiven Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten

$$\overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} := \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \hat{\mathbf{L}} - \hat{\boldsymbol{\Omega}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (2.78)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}} := \dot{\hat{\mathbf{K}}} + \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{L}} - \hat{\boldsymbol{\Omega}} \hat{\mathbf{K}} \quad (2.79)$$

definiert werden. Damit können die Transformationsbeziehungen der objektiven Geschwindigkeiten zusammengefasst werden:

$$\overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} = \bar{\mathbf{R}}_p \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{F}_p^{-1} = \bar{\mathbf{R}}_e^T \overset{\Delta}{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{F}_e, \quad (2.80)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}} = \bar{\mathbf{R}}_p \dot{\tilde{\mathbf{K}}} \mathbf{F}_p^{-1} = \bar{\mathbf{R}}_e^T \overset{\Delta}{\mathbf{K}} \mathbf{F}_e. \quad (2.81)$$

Die Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  besitzt auf der Momentankonfiguration eine besonders einfache Darstellung in Form der Gleichung (2.52). Es soll untersucht werden, ob ein solch einfacher Zusammenhang auch für den plastischen Anteil  $\hat{\mathbf{L}}_p$  hergeleitet werden kann. Man beginnt bei den multiplikativen Zerlegungen (2.53) und (2.60) und führt elastische und plastische Differenzmaße

$$\Delta^e := \varphi \cdot d\mathbf{x} - \hat{\varphi} \cdot d\hat{\mathbf{x}}, \quad \Delta_c^e := \varphi_1 \cdot \text{grad} \varphi_2 [d\mathbf{x}] - \hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_2 [d\hat{\mathbf{x}}], \quad (2.82)$$

$$\Delta^p := \hat{\varphi} \cdot d\mathbf{x} - \Phi \cdot d\mathbf{X}, \quad \Delta_c^p := \hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_2 [d\hat{\mathbf{x}}] - \Phi_1 \cdot \text{Grad} \Phi_2 [d\mathbf{X}] \quad (2.83)$$

ein, wobei eine additive Zerlegung der Differenzmaße

$$\Delta = \Delta^e + \Delta^p, \quad (2.84)$$

$$\Delta_c = \Delta_c^e + \Delta_c^p \quad (2.85)$$

angenommen wird. In den Gleichungen (2.82) und (2.83) stellt der Operator  $\hat{\nabla}$  eine relative kovariante Ableitung dar, siehe GRAMMENOUDIS und TSAKMAKIS [32].

Anders als im Falle des relativen Gradienten verlangt die Definition von relativen kovarianten Ableitungen keinerlei Erfüllung von Kompatibilitäts- bzw Integrabilitätsbedingungen. Da mit relativen kovarianten Ableitungen gearbeitet werden soll, wird im Folgenden von einer **inkompatiblen mikropolaren Plastizität** geredet.

Man geht nach bekanntem Muster vor, wobei in den Gleichungen (2.82) und (2.83) die Vektoren anhand der Transformationsbeziehungen (2.54) und (2.61) ersetzt werden. Damit kann man die elastischen und plastischen mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren definieren,

$$\tilde{\epsilon}_p := \bar{\mathbf{U}}_p - \mathbf{1}, \quad \tilde{\epsilon}_e := \bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{U}}_p \quad \text{auf } \mathcal{R}_R, \quad (2.86)$$

$$\hat{\epsilon}_p := \mathbf{1} - (\bar{\mathbf{V}}_p)^{-1}, \quad \hat{\epsilon}_e := \bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1} \quad \text{auf } \hat{\mathcal{R}}_t, \quad (2.87)$$

$$\epsilon_p := \bar{\mathbf{V}}_e - \bar{\mathbf{V}}, \quad \epsilon_e := \mathbf{1} - (\bar{\mathbf{V}}_e)^{-1} \quad \text{auf } \mathcal{R}_t \quad (2.88)$$

und es gilt

$$\Delta_c^p = \tilde{\mathcal{K}}_p [\Phi_1, \Phi_2, d\hat{\mathbf{X}}] = \hat{\mathcal{K}}_p [\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, d\hat{\mathbf{x}}] = \mathcal{K}_p [\varphi_1, \varphi_2, d\mathbf{x}], \quad (2.89)$$

$$\Delta_c^e = \tilde{\mathcal{K}}_e [\Phi_1, \Phi_2, d\hat{\mathbf{X}}] = \hat{\mathcal{K}}_e [\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, d\hat{\mathbf{x}}] = \mathcal{K}_e [\varphi_1, \varphi_2, d\mathbf{x}]. \quad (2.90)$$

Wie in GRAMMENOUDIS und TSAKMAKIS [28] dargestellt, führen multiplikative Zerlegungen bei großen Deformationen auf eine additive Zerlegung der Verzerrungen und Krümmungen:

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_e + \hat{\epsilon}_p, \quad (2.91)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}_e + \hat{\mathbf{K}}_p. \quad (2.92)$$

Gleichungen der Form (2.91) und (2.92) stellen in der mikropolaren Plastizität bei kleinen Deformationen meist den Ausgangspunkt dar, um die Gesamtverzerrung in elastische und plastische Anteile aufzuteilen. Bei der Gewinnung von objektiven elastoplastischen Geschwindigkeiten geht man von den *pull-back*-Transformationen

$$\tilde{\epsilon}_p = (\bar{\mathbf{R}}_p)^T \hat{\epsilon}_p \mathbf{F}_p, \quad \tilde{\mathbf{K}}_p = (\bar{\mathbf{R}}_p)^T \hat{\mathbf{K}}_p \mathbf{F}_p \quad (2.93)$$

$$\tilde{\epsilon}_e = (\bar{\mathbf{R}}_p)^T \hat{\epsilon}_e \mathbf{F}_p, \quad \tilde{\mathbf{K}}_e = (\bar{\mathbf{R}}_p)^T \hat{\mathbf{K}}_e \mathbf{F}_p \quad (2.94)$$

aus, wobei auch bezüglich objektiver Geschwindigkeiten ein analoges Transformationsverhalten vorausgesetzt wird. Werden die Gleichungen (2.93), (2.94) zeitlich abgeleitet, dann können nach einer Umstellung die elastoplastischen Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten anhand der Definitionen

$$\overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p := \dot{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\epsilon}_p \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\Omega}_p \hat{\epsilon}_p, \quad (2.95)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_e := \dot{\hat{\epsilon}}_e + \hat{\epsilon}_e \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\Omega}_p \hat{\epsilon}_e, \quad (2.96)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p := \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p + \hat{\mathbf{K}}_p \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{K}}_p, \quad (2.97)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_e := \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e + \hat{\mathbf{K}}_e \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{K}}_e \quad (2.98)$$

eingeführt werden. Über die Gleichungen (2.91) und (2.92) erhält man die Zerlegung der objektiven Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten in elastische und plastische Anteile

$$\overset{\Delta}{\hat{\epsilon}} = \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_e + \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p, \quad (2.99)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}} = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_e + \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p. \quad (2.100)$$

Damit stehen alle Gleichungen zur Verfügung, um die Zusammensetzung des plastischen Geschwindigkeitsgradienten  $\hat{\mathbf{L}}_p$  zu ermitteln. Wird die erste Gleichung in (2.66) nach der Zeit differenziert und von der Identität  $\dot{\hat{\epsilon}}_p = \dot{\mathbf{U}}_p$  gebraucht gemacht, dann folgt die einfache Beziehung

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p + \hat{\Omega}_p. \quad (2.101)$$

Ein Sonderfall ergibt sich, wenn gefordert wird, dass der Tensor der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit symmetrisch ist. Man zerlegt den plastischen Geschwindigkeitsgradienten  $\hat{\mathbf{L}}_p$  in einen symmetrischen  $\hat{\mathbf{D}}_p$  und antisymmetrischen Anteil  $\hat{\mathbf{W}}_p$

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{W}}_p. \quad (2.102)$$

Für den genannten Sonderfall ergibt sich dann der Zusammenhang

$$\hat{\mathbf{W}}_p = \hat{\Omega}_p \quad \text{mit} \quad \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p = \left( \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p \right)^T. \quad (2.103)$$

Der Spin  $\hat{\Omega}_p$  der Mikroelemente ist demnach gleich der makroskopischen plastischen Wirbelgeschwindigkeit  $\hat{\mathbf{W}}_p$ .

## 2.2 Kontaktkinematik

Um die geometrischen Beziehungen eines mikropolaren Kontaktproblems herzuleiten, geht man von zwei Körpern aus, die sich unabhängig von einander im Raum bewegen. Es ist üblich, einen der Körper als *master*-Körper, den anderen als *slave*-Körper zu bezeichnen, siehe vor allem HALLQUIST [36], WRIGGERS [85], SCHERF [69] und LAURSEN [50]. Eine solche Hierarchie folgt zunächst aus einer willkürlichen Einteilung. In der aktuellen Konfiguration werden die von den Körpern eingenommenen Raumbereiche mit  $\mathcal{R}_t^m$  und  $\mathcal{R}_t^s$  symbolisiert. Für die Ränder der Körper werden die Symbole  $\partial\mathcal{R}_t^m$  und  $\partial\mathcal{R}_t^s$  verwendet. In der Referenzkonfiguration wird dementsprechend die Notationen  $\mathcal{R}_R^m$  und  $\mathcal{R}_R^s$ , sowie  $\partial\mathcal{R}_R^m$  und  $\partial\mathcal{R}_R^s$  benutzt. Die Voraussetzung für einen möglichen Kontakt der Körper ist nur dann gegeben, wenn auf beiden Körpern freie Oberflächen existieren. Hierfür ist es zweckmäßig, festgelegte Randbereich der Körper als potentielle Kontaktflächen zu definieren. Bei der Notation folgt man LAURSEN [50] und wählt für einen solchen Kontaktrand des *master*- und *slave*-Körpers die Bezeichnungen  $\gamma^m$ ,  $\gamma^s$  und  $\Gamma^m$ ,  $\Gamma^s$  in Momentan- und Referenzkonfiguration.

Eine Erweiterung des klassischen Kontaktes besteht darin, dass an den Punkten beider Kontaktflächen Mikrokontinua angeheftet sind und diese bei Kontakt interagieren können.

In Zusammenhang mit der Modellierung von Verschleiß und Abrieb existieren Theorien, bei denen sich Teilchen frei in der Kontaktschicht bewegen bzw. rotieren dürfen und somit nicht den Körperrändern angehören, siehe ZMITROWICS [91], [92] und [93].

### 2.2.1 Makroskopische Kontaktkinematik

Seien

$$\mathbf{x}^m = \mathbf{x}^m(\mathbf{X}^m, t), \quad \mathbf{x}^m \in \gamma^m, \quad \mathbf{X}^m \in \Gamma^m, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{x}^s = \mathbf{x}^s(\mathbf{X}^s, t), \quad \mathbf{x}^s \in \gamma^s, \quad \mathbf{X}^s \in \Gamma^s. \quad (2.105)$$

die Bewegungsgleichungen für die makroskopischen Kontaktpunkte.

Kontaktzustände werden anhand von relativen Bewegungen zwischen den Kontaktflächen erfasst. Als Bezugssystem für eine Beschreibung relativer Bewegungen wird die *master*-Kontaktfläche verwendet. Man benetzt hierfür die *master*-Fläche mit konvektiven Koordinaten  $\xi^\alpha$ . Der Ortsvektor der Flächenteilchen  $\mathbf{X}^m$  kann somit anhand der Koordinaten  $\xi^\alpha$  parametrisiert werden,

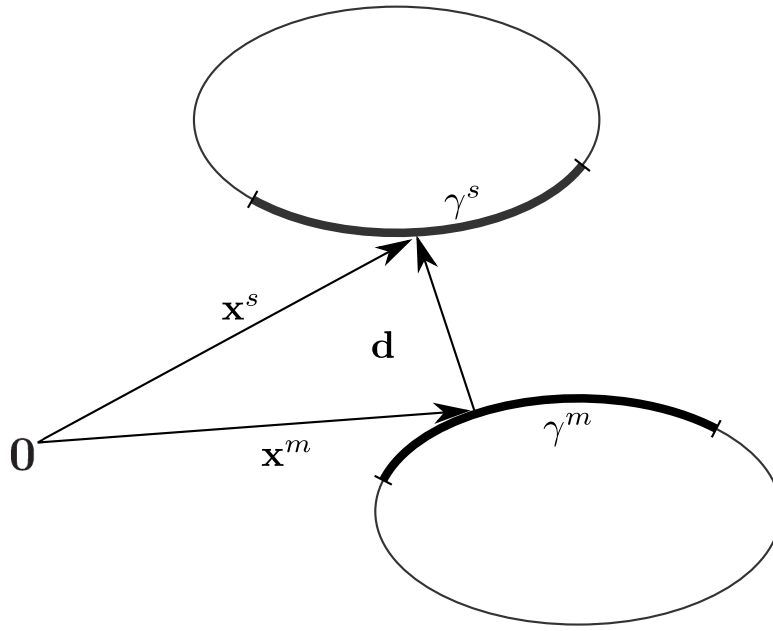
$$\mathbf{X}^m = \mathbf{X}^m(\xi^\alpha), \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.106)$$

Die Bewegung der Flächenpunkte auf der Oberfläche  $\gamma_m$  ist dann gegeben durch Einsetzen von (2.106) in die Bewegungsgleichung (2.104),

$$\mathbf{x}^m = \mathbf{x}^m(\mathbf{X}^m(\xi^\alpha), t) = \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t). \quad (2.107)$$

Zwei beliebige Punkte der *master*- und *slave*-Oberflächen lassen sich über einen Differenzvektor

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^m) := \mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m \quad (2.108)$$



**Abbildung 2.1:** Bewegungen und Abstandsvektor der Kontaktflächen

in Beziehung setzen, siehe Bild 2.1. Der Vektor  $\mathbf{d}$  wird als Abstandsvektor bezeichnet. Um den Kontaktzustand an einem Punkt der Kontaktfläche vollständig zu charakterisieren, muss zuerst geprüft werden, ob an diesem Punkt Kontakt herrscht. Es wird hierbei eine unilaterale Prüfung verwendet, indem man abhängig von einem Punkt der *slave*-Fläche  $\mathbf{x}^s$  die Abstände zu den Punkten der *master*-Kontaktflächen ermittelt. Für den Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten gilt,

$$\|\mathbf{d}\| = \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)\|. \quad (2.109)$$

Kontakt kann nur an Punktenpaaren entstehen, die minimalen Abstand besitzen. Die notwendige Bedingung für einen minimalen Abstand zwischen *master*- und *slave*-Punkt ist dann erfüllt, wenn die Ableitung des Abstandes bezüglich der Flächenkoordinaten die Gleichung

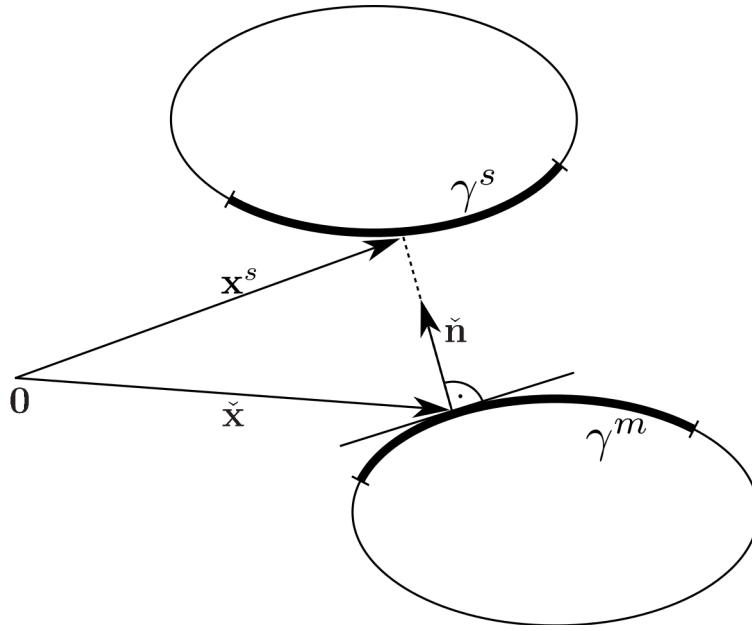
$$\left. \frac{\partial \|\mathbf{d}\|}{\partial \xi^\alpha} \right|_{\xi^\alpha = \check{\xi}^\alpha} = 0 \quad (2.110)$$

für einen festgehaltenen Punkt  $\mathbf{x}^s$  erfüllt (siehe z.B. WRIGGERS [85]). Man setzt voraus, dass die Kontaktfläche  $\gamma^m$  ausreichend groß gewählt wurde und keine Kanten besitzt oder dazu äquivalent, dass mindestens ein Punkt  $\mathbf{x}^m$  existiert, an dem die Ableitung des Abstandes verschwindet. Die Bedingung (2.110) stellt die Bestimmungsgleichung für die Koordinaten  $\check{\xi}^\alpha$  des Punktes  $\mathbf{x}^m$  dar, der den kleinsten Abstand zu Punkt  $\mathbf{x}^s$  besitzt. Wird Bedingung (2.110) unter Berücksichtigung von Gleichung (2.109) ausgewertet, dann erhält man zunächst die Gleichung (**Projektionsvorschrift**)

$$\left. \frac{\partial \|\mathbf{d}\|}{\partial \xi^\alpha} \right|_{\xi^\alpha = \check{\xi}^\alpha} = - \frac{\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)}{\|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)\|} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial \xi^\alpha} \right|_{\xi^\alpha = \check{\xi}^\alpha} = 0. \quad (2.111)$$

Seien

$$\check{\xi}^\alpha = \xi^\alpha(\mathbf{X}^s, t) \quad (2.112)$$



**Abbildung 2.2:** Kontaktpunkt und Kontaktnormale

die Werte der konvektiven Koordinaten des Punktes  $\mathbf{x}^m$ , an denen die Gleichung (2.111) erfüllt ist. Wird (2.112) in die Bewegungsgleichung (2.107) eingesetzt, dann erhält man den Positionsvektor des Kontakt- bzw. Projektionspunktes  $\check{\mathbf{x}}$  zum Zeitpunkt  $t$ :

$$\check{\mathbf{x}} := \mathbf{x}^m(\check{\xi}^\alpha, t) = \mathbf{x}^m(\mathbf{X}^s, t), \quad (2.113)$$

$$\check{\mathbf{X}} := \mathbf{X}^m(\check{\xi}^\alpha). \quad (2.114)$$

Für eindeutige  $\check{\xi}^\alpha$  stellt Gleichung (2.113) eine nicht-materielle Bewegungsgleichung einer Projektion des Punktes der *slave*-Fläche auf die *master*-Fläche dar. Die Eindeutigkeit dieser Abbildung wurde z.B. in CURNIER, HE und KLARBRING [17] untersucht. Die partiellen Ableitungen in der Gleichung (2.111) lassen sich geometrisch als Tangentenvektoren an der Position  $\check{\xi}^\alpha$  deuten. Man führt hierfür die Bezeichnung

$$\check{\mathbf{a}}_\alpha := \left. \frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial \xi^\alpha} \right|_{\xi^\alpha = \check{\xi}^\alpha} \quad (2.115)$$

ein. Senkrecht auf beiden Vektoren  $\check{\mathbf{a}}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , steht die Normale  $\check{\mathbf{n}}$  an die *master*-Fläche  $\gamma^m$ ,

$$\check{\mathbf{n}} := \frac{\check{\mathbf{a}}_1 \times \check{\mathbf{a}}_2}{\|\check{\mathbf{a}}_1 \times \check{\mathbf{a}}_2\|} = \check{\mathbf{n}}(\check{\mathbf{x}}, t), \quad (2.116)$$

siehe Bild 2.2. Mit Hilfe der Projektion von  $\mathbf{x}^s - \check{\mathbf{x}}$  auf  $\check{\mathbf{n}}$  bildet man eine neue Abstandsfunktion

$$g := (\mathbf{x}^s - \check{\mathbf{x}}) \cdot \check{\mathbf{n}}. \quad (2.117)$$

Der Abstand  $g$  kann positive wie negative Werte annehmen oder verschwinden.

Bei der Diskussion des thermomechanischen Kontaktes zwischen zwei Körpern wird in der Regel zwischen Normal- und Tangentialrichtung unterschieden. Dementsprechend spricht man

von einem Normal- und einem Tangentialkontakt. Als Normalkontaktzustände werden die Fälle **kein Kontakt** ( $g > 0$ ), **Berührung** ( $g = 0$ ) und **Kontakt mit Durchdringung** ( $g \leq 0$ ) bezeichnet. Aus Erfahrung weiß man, dass sich Festkörper im Kontaktfall nicht durchdringen dürfen. Eine solche Einschränkung der Funktion  $g$  soll aber erst später in Form eines Materialgesetzes eingebracht werden.

Während die Geschwindigkeit des *slave*-Punktes durch die materielle Zeitableitung

$$\mathbf{v}^s := \frac{\partial \mathbf{x}^s}{\partial t} \equiv \frac{d\mathbf{x}^s}{dt} \quad (2.118)$$

gegeben ist, gilt für die materielle Geschwindigkeiten des zugeordneten *master*-Punktes

$$\check{\mathbf{v}}^m := \frac{\partial \mathbf{x}^m(\check{\xi}^\alpha, t)}{\partial t}. \quad (2.119)$$

Die beiden Vektoren  $\mathbf{v}^s$  und  $\check{\mathbf{v}}^m$  besitzen im Falle von keinem Kontakt unterschiedliche Angriffspunkte. Wegen der euklidischen Struktur des Raumes kann man jedoch den Vektor  $\mathbf{v}^s$  zum Angriffspunkt von  $\check{\mathbf{v}}^m$  parallel verschieben und so die Differenz  $\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m$  bilden. Dieser Differenzvektor lässt sich in Normal- und Tangentialanteile zerlegen. Man beginnt hierfür mit der Identität

$$\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m = \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}} [(\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m) \cdot \check{\mathbf{n}}] + \mathbf{1} [\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m], \quad (2.120)$$

so dass nach einer Umstellung die Gleichung

$$\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m = \check{\mathbf{n}} (\check{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m)) + (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}) [\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m] \quad (2.121)$$

entsteht (siehe ABBAS [2]). Um den ersten Term auf der rechten Seite zu vereinfachen, bildet man zunächst die zeitliche Ableitung der Abstandsfunktion (2.117):

$$\dot{g} = \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^s - \check{\mathbf{x}}) \cdot \check{\mathbf{n}} + (\mathbf{x}^s - \check{\mathbf{x}}) \cdot \frac{d\check{\mathbf{n}}}{dt}. \quad (2.122)$$

Diese Gleichung lässt sich wiederum vereinfachen, indem ausgenutzt wird, dass der Vektor  $(\mathbf{x}^s - \check{\mathbf{x}})$  stets kollinear mit der Normalen  $\check{\mathbf{n}}$  ist, so dass die Beziehung

$$g \check{\mathbf{n}} = (\mathbf{x}^s - \check{\mathbf{x}}) \quad (2.123)$$

folgt. Aus  $\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}} \equiv 1$  folgt  $\frac{d}{dt} (\check{\mathbf{n}} \cdot \check{\mathbf{n}}) = \dot{\check{\mathbf{n}}} \cdot \check{\mathbf{n}} + \check{\mathbf{n}} \cdot \dot{\check{\mathbf{n}}} = 0$  und  $\check{\mathbf{n}} \cdot \dot{\check{\mathbf{n}}} = 0$ , so dass der zweite Term in (2.122) identisch verschwindet. Die Änderungsrate von  $g$  lässt sich also in Form der Gleichung

$$\dot{g} = (\mathbf{v}^s - \dot{\check{\mathbf{x}}}) \cdot \check{\mathbf{n}} \quad (2.124)$$

angeben. Die Projektionsfunktion  $\check{\mathbf{x}}$  besitzt die Argumente

$$\check{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^m(\check{\xi}^\alpha, t) = \mathbf{x}^m(\xi^\alpha(\mathbf{X}^s, t), t). \quad (2.125)$$

Die Geschwindigkeit des Projektionspunktes, die mit  $\dot{\mathbf{x}}$  bezeichnet werden soll, erhält man durch eine zeitliche Ableitung der Funktion (2.125),

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha(\mathbf{X}^s, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)}{\partial t}, \quad (2.126)$$

wobei die Terme der rechten Seite der Form nach einer substantiellen Ableitung gleichen. Der erste Term auf der rechten Seite in Definition (2.126) steht immer tangential zur *master*-Fläche. Es wird eine Änderungsrate der Projektionskoordinaten

$$\dot{\xi}^\alpha := \frac{\partial \xi^\alpha(\mathbf{X}^s, t)}{\partial t} \quad (2.127)$$

eingeführt und die relative tangentiale Geschwindigkeit des Projektionspunktes durch

$$\mathbf{v}_T := \dot{\xi}^\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad (2.128)$$

definiert. Mit dieser Definition entsteht eine vereinfachte Darstellung der nicht materiellen Geschwindigkeit des Projektionspunktes in Form der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_T + \dot{\mathbf{v}}^m. \quad (2.129)$$

Die Größe  $\mathbf{v}_T$  stellt somit die Differenzgeschwindigkeit von Projektionspunkt und materiellem Masterpunkt dar. Tangenten- und Normalenvektor stehen immer senkrecht aufeinander,  $\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ . Zusammen mit (2.124) führt dies auf eine weitere Darstellung der Änderungsrate des Normalabstandes,

$$\dot{g} = (\mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.130)$$

Nun ist man in der Lage, den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.121) als den Normalanteil der Differenzgeschwindigkeit zu identifizieren, so dass

$$\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m)) = \dot{g} \mathbf{n}. \quad (2.131)$$

Dementsprechend liefert der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.121) eine tangentiale Differenzgeschwindigkeit, für die die Bezeichnung  $\mathbf{v}_\tau$  gewählt wird,

$$\mathbf{v}_\tau := (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) [\mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m]. \quad (2.132)$$

Insgesamt gilt für die Differenz  $\mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m$  in Gleichung (2.121)

$$\mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m = \dot{g} \mathbf{n} + \mathbf{v}_\tau. \quad (2.133)$$

Man merke, dass diese Gleichung für alle Zustände, d.h. kein Kontakt, Berührung und Durchdringung gilt.

Man greift zurück auf Gleichung (2.129) und stellt fest, dass für die Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{v}}^m$  gilt. Auf der anderen Seite erhält man aus (2.123), dass  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^s - (g \mathbf{n})'$  und somit

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m - (g \mathbf{n})', \quad (2.134)$$

$$= \mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m - \dot{g} \mathbf{n} - g \dot{\mathbf{n}}. \quad (2.135)$$

Mit der letzten Gleichung und (2.133) lässt sich die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_\tau$  und  $\mathbf{v}_T$  angeben:

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}^s - \dot{\mathbf{v}}^m - \dot{g} \mathbf{n} = \mathbf{v}_T + g \dot{\mathbf{n}}. \quad (2.136)$$



## 2.2.2 Mikroskopischer Kontakt

Wie im Fall innerer Körperpunkte heftet man an jeden makroskopischen Punkt der Kontaktfläche ein Mikrokontinuum an. Die Mikrokontinua der Kontaktflächen werden als dreidimensionale Räume aufgefasst, die sich bei Kontakt durchdringen und miteinander wechselwirken können. Es werden relative Ortsvektoren an makroskopischen Kontaktpunkten als Funktionen

$$\varphi^s = \varphi^s(\mathbf{X}^s, \Phi, t) \quad \text{und} \quad (2.137)$$

$$\check{\varphi} = \varphi^m(\check{\mathbf{X}}, \Phi, t) \quad (2.138)$$

eingeführt und die Vektoren  $\check{\varphi}$  und  $\varphi^s$  als Mikrobewegungen innerhalb der *master*- und *slave*-Kontaktfläche bezeichnet. Der Vektor  $\check{\varphi}$  stellt dabei die Mikrobewegung am Projektions- bzw. Kontaktpunkt dar. Man definiert die Gradienten der Mikrobewegungen über

$$\bar{\mathbf{R}}^s = \bar{\mathbf{R}}^s(\mathbf{X}^s, t) = \frac{\partial \varphi^s}{\partial \Phi}, \quad (2.139)$$

$$\check{\bar{\mathbf{R}}} := \bar{\mathbf{R}}^m(\check{\mathbf{X}}, t) = \left. \frac{\partial \varphi^m(\mathbf{X}^m, \Phi, t)}{\partial \Phi} \right|_{\mathbf{X}^m = \check{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \varphi^m(\check{\mathbf{X}}, \Phi, t)}{\partial \Phi}, \quad (2.140)$$

wobei die Größen  $\bar{\mathbf{R}}^s$  und  $\check{\bar{\mathbf{R}}}$  als Mikrorotationen der *slave*- und *master*-Fläche bezeichnet werden. Der Projektionsort ist eine Funktion  $\check{\mathbf{X}} = \check{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^s, t)$ , so dass die Mikrobewegung und -deformation auf der *master*-Fläche auch allgemein als Funktionen

$$\check{\varphi} = \check{\varphi}(\mathbf{X}^s, \Phi, t), \quad (2.141)$$

$$\check{\bar{\mathbf{R}}} = \check{\bar{\mathbf{R}}}^m(\mathbf{X}^s, t) \quad (2.142)$$

dargestellt werden können. Es gelten die Transformationseigenschaften

$$\varphi^s = \bar{\mathbf{R}}^s[\Phi], \quad (2.143)$$

$$\check{\varphi} = \check{\bar{\mathbf{R}}}[\Phi], \quad (2.144)$$

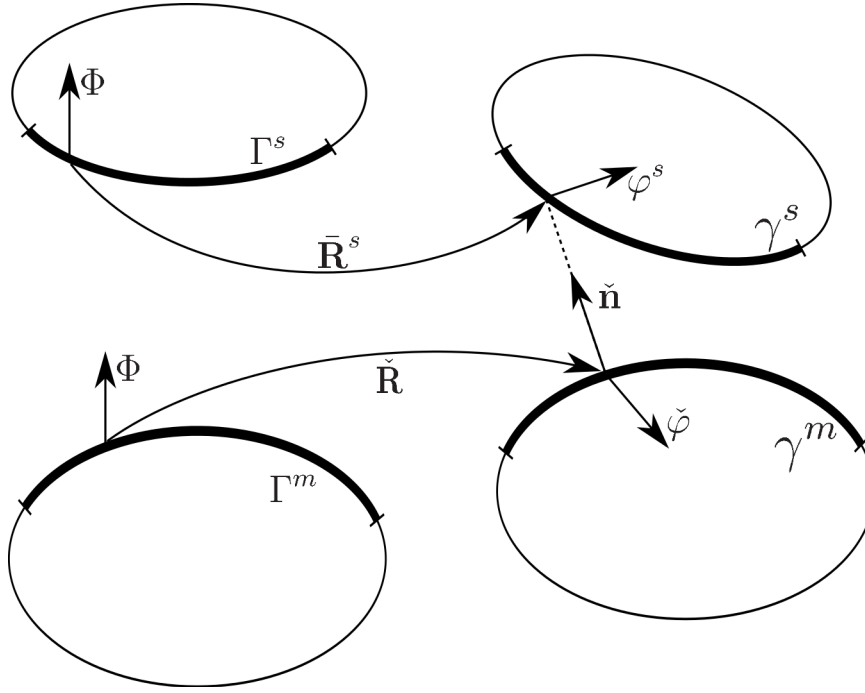
siehe Bild 2.3. Über die Definition einer skalaren Mikrodifferenz,

$$\Delta_R := \check{\varphi} \cdot \varphi^s - \Phi \cdot \Phi, \quad (2.145)$$

kann ein Maß für die relative Mikrorotation hergeleitet werden. Um das skalare Produkt  $\check{\varphi} \cdot \varphi^s$  bilden zu dürfen, denkt man sich den Angriffspunkt des Vektors  $\check{\varphi}$  von  $\check{\mathbf{x}}$  nach  $\mathbf{x}^s$  verschoben. Dies ist im Euklidischen Raum immer möglich. Auf diese Weise stellt  $\check{\varphi} \cdot \varphi^s$  ein inneres Produkt in dem Tangentialvektorraum des Punktes  $\mathbf{x}^s$  dar. In diesem Sinne wird auch von einer Momentankonfiguration  $\gamma^s$  geredet. Auch  $\Phi \cdot \Phi$  soll als inneres Produkt in dem Tangentialvektorraum des Punktes  $\mathbf{X}^s$  verstanden werden, so dass man sinngemäß von einer Referenzkonfiguration  $\Gamma^s$  spricht. Es folgt, dass  $\check{\bar{\mathbf{R}}}(\mathbf{X}^s, t)$  in Gleichung (2.144) als Zweipunktensor von der Referenzkonfiguration  $\Gamma^s$  auf die Momentankonfiguration  $\gamma^s$  zu verstehen ist. Definition (2.145) lässt sich somit bezüglich der Referenz- und Momentankonfiguration darstellen:

$$\Delta_R = \Phi \cdot \left( \check{\bar{\mathbf{R}}}^T \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) [\Phi], \quad (2.146)$$

$$= \check{\varphi} \cdot \left( \mathbf{1} - \check{\bar{\mathbf{R}}}(\bar{\mathbf{R}}^s)^T \right) [\varphi^s]. \quad (2.147)$$



**Abbildung 2.3:** Mikroskopische Kontaktkinematik

Der Klammerausdruck in Gleichung (2.146) stellt damit das Maß einer rotatorischen Differenz in der Referenzkonfiguration  $\Gamma^s$  dar. Als Bezeichnung wird

$$\tilde{\mathbf{G}} := \check{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{X}^s, t) \quad (2.148)$$

gewählt, wobei das Differenzmaß im Allgemeinen eine Funktion  $\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{X}^s, t)$  darstellt. Wenn man das skalare Maß in Definition (2.145) bezüglich der Momentankonfiguration  $\gamma^s$  auswertet, dann kann eine mikrorotatorische Differenz mit  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^s, t)$  über eine Gleichung

$$\mathbf{G} := \mathbf{1} - \check{\mathbf{R}} \left( \bar{\mathbf{R}}^s \right)^T \quad (2.149)$$

eingeführt werden. Aus den Definitionen (2.148) und (2.149) erhält man das Transformationsgesetz der mikroskopischen Rotationsdifferenz zwischen Momentan- und Referenzkonfiguration der *slave*-Fläche,

$$\tilde{\mathbf{G}} = \check{\mathbf{R}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{R}}^s. \quad (2.150)$$

Über die Zeitableitung des skalaren Maßes, Gleichung (2.145), und den Definitionen mikropolarer Spintensoren

$$\boldsymbol{\Omega}^s := \dot{\check{\mathbf{R}}}^s \left( \bar{\mathbf{R}}^s \right)^T, \quad (2.151)$$

$$\check{\boldsymbol{\Omega}} := \dot{\check{\mathbf{R}}} \check{\mathbf{R}}^T, \quad (2.152)$$

führt man in der Momentankonfiguration  $\gamma^s$  eine objektive Geschwindigkeit

$$\overset{\Delta}{\mathbf{G}} := \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{G} \boldsymbol{\Omega}^s - \check{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{G} \quad (2.153)$$

ein. Aus dieser Definition und einer Zeitableitung von Gleichung (2.150) ergibt sich dann das *pull-back*-Transformationsgesetz der Geschwindigkeit in Form der Gleichung

$$\dot{\mathbf{G}} = \check{\mathbf{R}}^T \overset{\Delta}{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{R}}^s. \quad (2.154)$$

Wenn von Definition (2.148) ausgegangen und die Zeitableitung gebildet wird und zudem (2.154) berücksichtigt wird, dann lässt sich die objektive Geschwindigkeit  $\overset{\Delta}{\mathbf{G}}$  auch durch die mikropolaren Spintensoren ausdrücken,

$$\overset{\Delta}{\mathbf{G}} = \boldsymbol{\Omega}^s - \check{\mathbf{\Omega}}. \quad (2.155)$$

Daraus folgt, dass die objektive Differenzgeschwindigkeit  $\overset{\Delta}{\mathbf{G}}$  wie die Spintensoren  $\boldsymbol{\Omega}^s$  und  $\check{\mathbf{\Omega}}$  die Eigenschaft der Antisymmetrie besitzt. Man kann somit der Geschwindigkeit  $\overset{\Delta}{\mathbf{G}}$  bezüglich der Momentankonfigurationen einen axialen Vektor  $\Delta\boldsymbol{\omega} = \Delta\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^s, t)$  zuordnen:

$$\Delta\boldsymbol{\omega} := \text{axl} \left( \overset{\Delta}{\mathbf{G}} \right) = \boldsymbol{\omega}^s - \check{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.156)$$

mit  $\boldsymbol{\omega}^s = \text{axl}(\boldsymbol{\Omega}^s)$  und  $\check{\boldsymbol{\omega}} = \text{axl}(\check{\mathbf{\Omega}})$ .



### 3 Thermodynamik

In diesem Kapitel wird die Kinematik benutzt, um energetische Größen einzuführen. Bei Kontaktproblemen setzt sich der gesamte Bereich aus den Teilbereichen der *master*- und *slave*-Körper zusammen,

$$\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_t^m \cup \mathcal{R}_t^s, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{R}_R = \mathcal{R}_R^m \cup \mathcal{R}_R^s. \quad (3.2)$$

Die gesamte Kontaktfläche kann ebenfalls in die Einzelflächen beider Kontaktkörper aufgeteilt werden

$$\gamma := \gamma^m \cup \gamma^s \quad (3.3)$$

$$\Gamma := \Gamma^m \cup \Gamma^s. \quad (3.4)$$

Dementsprechend existieren vereinigte Teilmengen

$$\partial \mathcal{R}_R = \partial \mathcal{R}_R^m \cup \partial \mathcal{R}_R^s = (\partial \mathcal{R}_R \setminus \Gamma) \cup \Gamma, \quad (3.5)$$

$$\partial \mathcal{R}_t = \partial \mathcal{R}_t^m \cup \partial \mathcal{R}_t^s = (\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma) \cup \gamma \quad (3.6)$$

bezüglich der Referenz- und Momentankonfiguration.

Für die Modellierung thermomechanischer Effekte bei Kontaktvorgängen fügt man im Kontaktbereich eine Zwischenschicht ein. Das Materialverhalten dieser Schicht ist im Allgemeinen nicht von den Materialien der Kontaktkörper abhängig. Es ist üblich, die Zwischenschicht an die *slave*-Fläche  $\gamma^s$  zu binden.

Die Bereiche auf  $\gamma^s$ , die bei Kontakt mit  $\gamma^m$  zusammenfallen oder sich durchdringen, werden als effektive (oder auch aktive) Bereiche  $\gamma_{eff}^s$  bezeichnet. Alle nicht-effektiven (inaktiven) Bereiche der Kontaktflächen werden mit  $\bar{\gamma}_{eff}^s$  bezeichnet. Es gilt

$$\gamma^s = \gamma_{eff}^s \cup \bar{\gamma}_{eff}^s, \quad \gamma_{eff}^s \cap \bar{\gamma}_{eff}^s = \emptyset. \quad (3.7)$$

Eine Darstellung der klassische Thermodynamik kontinuierlicher Systeme findet sich z.B. bei TRUESDELL und TUPIN [79]. Allgemeine Lehrbücher sind z.B. HUTTER [41], ZIEGLER [88] und CALLEN [10]. Die Thermodynamik mikropolarer Kontinua wird ausführlich in ERINGEN [23] dargestellt. Aufbauend auf MINDLIN's Vorgehensweise in [60] wird die Herleitung der mikropolaren mechanischen Bilanzgleichungen in GRAMMENODIS und TSAKMAKIS [31] angegeben. Verfestigungsgesetze und das Postulat von ILUSHIN werden in GRAMMENODIS und TSAKMAKIS [28] in Zusammenhang mit einer mikropolaren Plastizität großer Deformationen diskutiert. Separate isotrope Verfestigungen in Abhängigkeit mikropolarer Verzerrungen und Krümmungen werden in GRAMMENODIS und TSAKMAKIS [33] untersucht. Eine thermodynamisch konsistente Kontakttheorie wird zum Beispiel in LAURSEN [50], [49], WRIGGERS [85] und SCHERF [69] behandelt. Ein zweidimensionales Kontaktmodell für mikropolare Materialien wird in ZHANG, WANG, WRIGGERS und SCHREFLER [87] beschrieben.

---

## Massenbilanz

---

Eine wichtige Zustandsgröße, die thermodynamischen Systemen zugeordnet werden kann, ist die Masse. Im Rahmen einer thermodynamischen Kontinuumsmechanik ist die Gesamtmasse eines Systems über das Integral einer Massendichte in der Momentankonfiguration definiert:

$$\mathcal{M} := \int_{\mathcal{R}_t} dm = \int_{\mathcal{R}_t} \rho \, dv. \quad (3.8)$$

Die Dichte  $\rho$  lässt sich in mikropolaren Theorien mit einer Dichtefunktion des Mikrokontinuums in Verbindung bringen. Man definiert zu diesem Zweck makroskopische Massendichten in der Referenz- und Momentankonfiguration über die Gleichungen

$$\tilde{\rho} := \frac{1}{V'} \int_{\mathcal{R}'_t} \tilde{\rho}' \, dV' \quad \text{und} \quad \rho := \frac{1}{J V'} \int_{\mathcal{R}'_t} \rho' \, dv', \quad (3.9)$$

wobei  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\mathbf{X})$  und  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  sowie  $\tilde{\rho}' = \tilde{\rho}'(\mathbf{X}, \Phi)$  und  $\rho' = \rho'(\mathbf{x}, \varphi, t)$  Massendichten bezüglich Referenz- und Momentankonfiguration innerhalb Makro- und Mikrokontinua darstellen. In der Referenzkonfiguration ändern sich die Massendichten zeitlich nicht, so dass  $\dot{\tilde{\rho}} = 0$  und  $\dot{\tilde{\rho}}' = 0$  gelten. Die Massenbilanz oder auch Kontinuitätsgleichung sagt aus, dass sich die Gesamtmasse eines Systems zeitlich nicht ändert,

$$\dot{\mathcal{M}} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M} = \int_{\mathcal{R}_t} \rho \, dv = \int_{\mathcal{R}_R} \tilde{\rho} \, dV. \quad (3.10)$$

Die Gesamtmasse der Referenzkonfiguration ist stets gleich der Gesamtmasse der Momentankonfiguration. Unter Berücksichtigung von  $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{J} \operatorname{div} \mathbf{v}$  kann gezeigt werden, dass die Bilanz (3.10) auch eine Darstellung

$$\dot{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{R}_t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv = 0 \quad (3.11)$$

besitzt. Eine lokale Form dieser Massenbilanz gewinnt man mit Hilfe des Lokalisationstheorems (siehe z.B. GURTIN [34], S. 38), so dass an jedem Punkt des Systems die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \quad (3.12)$$

gilt. Wird die Massenbilanz (3.10) bezüglich einer Transformation von Volumenelementen, d.h. anhand der Gleichung  $dv = J \, dV$ , ausgewertet, dann erhält man eine alternative Form der lokalen Massenbilanz,

$$\tilde{\rho} = J \rho. \quad (3.13)$$

Es wird gefordert, dass auch die Massen von Mikrokontinua erhalten bleiben. Dies wird durch Gleichung

$$\tilde{\rho}' = J' \rho' \quad (3.14)$$

ausgedrückt, wobei von der Definition  $J' := \det(\bar{\mathbf{R}})$  Gebrauch gemacht wird. Bei mikropolaren Kontinua gilt  $\det(\bar{\mathbf{R}}) = 1$ , so dass man sofort die Identitäten

$$\tilde{\rho}' = \rho', \quad \dot{\tilde{\rho}}' = \dot{\rho}' = 0, \quad (3.15)$$

$$dV' = dv', \quad \mathbf{V}' = \mathbf{v}', \quad (3.16)$$

erhält. Es wird angenommen, dass sich der Schwerpunkt der Mikrostruktur stets an der Stelle  $\Phi = \mathbf{0}$  bzw.  $\varphi = \mathbf{0}$  befindet. Wenn von den Gleichungen

$$\Phi_S := \frac{1}{\tilde{\rho} V'} \int_{\mathcal{R}'_R} \tilde{\rho}' \Phi dV' = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\varphi_S := \frac{1}{J \rho v'} \int_{\mathcal{R}'_t} \rho' \Phi dv' = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

der Schwerpunkte  $\Phi_S$  und  $\varphi_S$  bezüglich der Referenz- und Momentankonfiguration ausgegangen wird, dann lassen sich über eine Zeitableitung die einfachen Beziehungen

$$\int_{\mathcal{R}'_R} \tilde{\rho}' \dot{\Phi} dV' = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

$$\int_{\mathcal{R}'_t} \rho' \dot{\varphi} dv' = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

gewinnen.

### 3.1 Erster Hauptsatz und Impulsbilanzen

Dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik liegt die Annahme zugrunde, dass Energie eine Erhaltungsgröße ist. Man formuliert hierfür die globale Bilanzgleichung

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_a + \mathcal{Q}. \quad (3.21)$$

Diese Gleichung ist Ausdruck des Postulates, dass die zeitliche Änderungen von der Größe  $\mathcal{E}$ , genannt die innere Energie, und die zeitliche Änderung kinetischer Energie  $\mathcal{K}$  mit der Leistung der äußeren Kräfte  $\mathcal{L}_a$  und der Wärme  $\mathcal{Q}$  im Gleichgewicht stehen.

Um aus der globalen Bilanz (3.21) eine lokale Gleichung zu gewinnen, werden die globalen Größen mit lokalen Dichtefunktionen in Verbindung gebracht. Man nimmt an, dass sich die innere Energie bei Kontaktproblemen aus den Anteilen

$$\mathcal{E} := \int_{\mathcal{R}_t} \rho e dv + \int_{\gamma^s} \frac{1}{j} e_c da^s \quad (3.22)$$

zusammensetzt, siehe ODEN und MARTINS [63]. In Gleichung (3.22) bezeichnet  $e = e(\mathbf{X}, t)$  die lokale spezifische Dichte der inneren Energie innerhalb des Körpers  $e_c = e_c(\mathbf{X}^s, t)$  stellt eine

flächenverteilte Energiedichte auf dem Kontaktrand dar, siehe SCHERF [69]. Die Änderungsrate bezüglich der Definition (3.22) gewinnt man, indem zunächst die innere Energie  $\mathcal{E}$  durch

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{R}_R} \tilde{\rho} e dV + \int_{\Gamma^s} e_c dA^s. \quad (3.23)$$

auf der Referenzkonfiguration ausdrückt. Man bildet die materiellen Zeitableitungen, wobei ausgenutzt wird, dass die Referenzkonfiguration nicht von der Zeit abhängt,

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{R}_R} \tilde{\rho} \dot{e} dV + \int_{\Gamma^s} \dot{e}_c dA^s, \quad (3.24)$$

transformieren zurück in die Momentankonfiguration und erhält die globale Änderung der inneren Energie in Form der Leistungsterme

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{R}_t} \rho \dot{e} dv + \int_{\gamma^s} \frac{1}{j} \dot{e}_c da^s. \quad (3.25)$$

In die kinetische Systemenergie gehen makro- und mikroskopische Bewegungsanteile ein, siehe GRAMMENOUDIS und TSAKMAKIS [31]:

$$\mathcal{K} := \int_{\mathcal{R}_t} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{J v'} \int_{\mathcal{R}'_t} \rho' (\mathbf{v} + \dot{\varphi}) \cdot (\mathbf{v} + \dot{\varphi}) dv' \right\} dv. \quad (3.26)$$

Für eine Vereinfachung des Ausdrucks (3.26) ist es hilfreich, die Tensoren

$$\Theta^* := \frac{1}{J v'} \int_{\mathcal{R}'_t} \rho' (\varphi \otimes \varphi) dv', \quad (3.27)$$

$$\tilde{\Theta}^* := \frac{1}{V'} \int_{\mathcal{R}'_t} \tilde{\rho}' (\Phi \otimes \Phi) dV' \quad (3.28)$$

bezüglich der Momentan- und Referenzkonfiguration zu definieren. Zwischen den Tensoren in Definitionen (3.27) und (3.28) gilt damit die Transformationsbeziehung

$$\Theta^* = \frac{1}{J} \bar{\mathbf{R}} \tilde{\Theta}^* \bar{\mathbf{R}}^T. \quad (3.29)$$

Darüber hinaus lässt sich bezüglich der Momentankonfiguration ausnutzen, dass der mikroskopische Spin  $\Omega$  einen axialen Vektor  $\omega$  besitzt. Will man kinetische Energien in Abhängigkeit des Vektor  $\omega$  angeben, dann ist es sinnvoll, anstatt des Tensors  $\Theta^*$  eine neue Größe

$$\Theta := \text{Sp}(\Theta^*) \mathbf{1} - \Theta^* \quad (3.30)$$

zu verwenden. Physikalisch interpretieren lassen sich die Tensoren  $\Theta$  und  $\Theta^*$ ,  $\tilde{\Theta}^*$  als mikroskopische Massenträgheitsdichten. Aus diesen Definitionen ist sofort ersichtlich, dass alle drei Trägheitsmaße die Eigenschaft der Symmetrie besitzen,  $\Theta = \Theta^T$  und  $\Theta^* = (\Theta^*)^T$ ,  $\tilde{\Theta}^* = (\tilde{\Theta}^*)^T$ .



Darüber hinaus ist eine Mikroträgheit auf der Referenzkonfiguration konstant, so dass  $\dot{\tilde{\Theta}}^* = 0$  gilt. Man kann zeigen, dass der Trägheitstensor  $\Theta$  mit einem mikroskopischen Eigendrehimpulsvektor  $\sigma$  verknüpft ist, siehe z.B. ERINGEN [23], GRAMMENOUUDIS und TSAKMAKIS [31]:

$$\sigma = \Theta [\omega]. \quad (3.31)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.20), (3.27), (3.30) und (3.31) erhält man schließlich die kinetische Energie in Form der Gleichung

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{R}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \frac{1}{2} \sigma \cdot \omega dv. \quad (3.32)$$

Wird die Definition (3.28) berücksichtigt, dann erhält die kinetische Energie die Darstellung

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{R}_R} \frac{1}{2} \tilde{\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dV + \int_{\mathcal{R}_R} \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^* \cdot \dot{\tilde{\mathbf{R}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{R}}} dV \quad (3.33)$$

bezüglich der Referenzkonfiguration. Eine Zeitableitung führt dann auf die Leistung der kinetischen Energie,

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_{\mathcal{R}_R} \tilde{\rho} \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} dV + \int_{\mathcal{R}_R} \tilde{\Theta}^* \cdot \ddot{\tilde{\mathbf{R}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{R}}} dV. \quad (3.34)$$

Anschließend liefert eine Rücktransformation die Leistung der kinetischen Energie der Momentankonfiguration,

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_{\mathcal{R}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \dot{\sigma} \cdot \omega dv. \quad (3.35)$$

Bei der Definition einer Leistung der äußeren Kräfte behandelt man die gesamte Kontaktfläche als eine innere Menge von Flächenpunkten. Eine solche Zuweisung gilt unabhängig von dem aktuellen Kontaktzustand, so dass auch bei separierten Körpern die Kontaktfläche als ein inneres Material verstanden wird. Äußere Kräfte und Momente dürfen somit an der Kontaktfläche nicht vorgegeben werden. Unter Berücksichtigung der Definition der Fläche  $\gamma$  in (3.3) führt man die Leistung der äußeren Kräfte durch

$$\mathcal{L}_a := \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \mathbf{t}_c \cdot \omega da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \omega dv. \quad (3.36)$$

ein. Die Größen  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{t}_c$  werden als (CAUCHY'sche-) Spannungsvektoren und Momentenspannungsvektoren bezeichnet. Bei Spannungsvektoren handelt es sich um Kräfte, die auf ein Flächenelement bezogen werden. Momentenspannungsvektoren stellen Momente pro Fläche dar. Im Gegensatz dazu stellen die Größen  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{b}_c$  volumenverteilte Kräfte und Momente dar, die an einem Volumenelement im Inneren des Körpers angreifen. In den Leistungen der äußeren

Kräfte können die Kontaktverhältnisse wie folgt berücksichtigt werden. Man ruft sich (3.6) und (3.3) in Erinnerung und spaltet die Leistungen aller Spannungsvektoren auf,

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_{\gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot \mathbf{v}^s \, da^s + \int_{\gamma^m} \mathbf{t}^m \cdot \mathbf{v}^m \, da^m, \quad (3.37)$$

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \, da = \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \, da + \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot \boldsymbol{\omega}^s \, da^s + \int_{\gamma^m} \mathbf{t}_c^m \cdot \boldsymbol{\omega}^m \, da^m. \quad (3.38)$$

Für die Kräfte und Momente an Punktpaaren  $(\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})$  vereinbart man zunächst unabhängig vom Abstand zwischen diesen Punkten, dass das dritte NEWTON'sche Gesetz gilt,

$$\mathbf{t}^m \, da^m = -\mathbf{t}^s \, da^s, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{t}_c^m \, da^m = -\mathbf{t}_c^s \, da^s. \quad (3.40)$$

In inaktiven Bereichen der Kontaktflächen gilt definitionsgemäß  $\mathbf{t}^s = \mathbf{t}^m = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{t}_c^s = \mathbf{t}_c^m = \mathbf{0}$ , siehe z.B. SCHERF [69]. Bezüglich aktiver Bereiche können insbesondere die Geschwindigkeits- und Spinvektoren durch die Ausdrücke

$$\mathbf{v}^m = \check{\mathbf{v}}^m, \quad (3.41)$$

$$\boldsymbol{\omega}^m = \check{\boldsymbol{\omega}}, \quad (3.42)$$

ersetzt werden. Die beiden letzten Terme in Gleichungen (3.37) und (3.38) können damit unter Berücksichtigung von (3.39) und (3.40) zusammengefasst werden:

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_{\gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot (\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m) \, da^s, \quad (3.43)$$

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \, da = \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \, da + \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot (\boldsymbol{\omega}^s - \check{\boldsymbol{\omega}}) \, da^s. \quad (3.44)$$

Man setzt Gleichungen (3.43) und (3.44) in Gleichung (3.36) ein und erhält die Leistung der äußeren Kräfte in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a = & \int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \, da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \, dv \\ & - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot (\dot{\mathbf{g}}\check{\mathbf{n}} + \mathbf{v}_\tau) \, da^s - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot (\boldsymbol{\omega}^s - \check{\boldsymbol{\omega}}) \, da^s. \end{aligned} \quad (3.45)$$

In dieser Gleichung wurde die Differenzgeschwindigkeit  $\mathbf{v}^s - \check{\mathbf{v}}^m$  durch die Zerlegung (2.133) ersetzt. Auch im Fall der CAUCHY'schen Spannungsvektoren  $\mathbf{t}^s$  bietet sich eine solche Zerlegung an, so dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^s &= \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}[\mathbf{t}^s] - \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}[\mathbf{t}^s] + \mathbf{1}[\mathbf{t}^s] \\ &= \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}[\mathbf{t}^s] + (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}})[\mathbf{t}^s]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die zweite Gleichung (3.46) legt die Definitionen eines Kontaktdruckes und zur Kontaktfläche tangential gerichteten Spannungsvektoren nahe:

$$\check{p} := -\check{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{t}^s \quad (3.47)$$

$$\mathbf{t}_T := (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}) [\mathbf{t}^s]. \quad (3.48)$$

Die skalare Größe  $\check{p}$  stellt hierbei den Kontaktdruck dar, für den nach üblicher Vereinbarung stets die Bedingung  $\check{p} \leq 0$  gilt. Der Vektor  $\mathbf{t}_T$  bezeichnet den tangentialen Spannungsvektor in der Kontaktfläche. Seine Komponenten lassen sich somit bezüglich der tangentialen Basisvektoren der Kontaktfläche darstellen,  $\mathbf{t}_T = t_T^\alpha \check{\mathbf{a}}_\alpha$ . Der Spannungsvektor kann gemäß der Gleichung

$$\mathbf{t}^s = -\check{p}\check{\mathbf{n}} + \mathbf{t}_T \quad (3.49)$$

zerlegt werden.

Bei mikropolaren Kontinua gibt es Tensoren  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{T}_c(\mathbf{x}, t)$  (siehe z.B. GRAMMENOUDES und TSAKMAKIS [31]), so dass

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) [\mathbf{n}] = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t), \quad (3.50)$$

$$\mathbf{T}_c(\mathbf{x}, t) [\mathbf{n}] = \mathbf{t}_c(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t). \quad (3.51)$$

Man bezeichnet  $\mathbf{T}$  als CAUCHY'schen Spannungstensor und  $\mathbf{T}_c$  als CAUCHY'sche Koppelspannungen. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.50), (3.51) erhält man schließlich für die Leistung der äußeren Kräfte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a = & \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div}(\mathbf{v}\mathbf{T}) dv + \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{T}_c) dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\omega} dv \\ & + \int_{\gamma^s} \check{p} \dot{g} da^s - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau da^s - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} da^s. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Der letzte Term in der Leistungsbilanz (3.21) beschreibt die Wärme, die das System mit seiner Umgebung austauscht. Dabei setzt sich die Wärme aus einem Energiefluss über die Oberfläche des Systems und einem volumetrischen Leistungseintrag zusammen,

$$\mathcal{Q} = \int_{\partial \mathcal{R}_t / \gamma} q da + \int_{\mathcal{R}_t} \rho r dv. \quad (3.53)$$

Die Größe  $q$  wird als Wärmeflussdichte bezeichnet und der Skalar  $r$  stellt einen Wärmeeintrag aus der Umgebung an inneren Körperpunkten dar. Der Wärmefluss der Kontaktfläche soll explizit miteinbezogen werden. Dafür wird der Fluss über die gesamte Oberfläche in die Anteile

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} q da = \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} q da + \int_{\gamma^s} q^s da^s + \int_{\gamma^m} q^m da^m. \quad (3.54)$$

aufgeteilt. Das CAUCHY'sche Fundamentaltheorem verlangt, dass

$$q = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.55)$$

Die Größe  $\mathbf{q}$  heißt Wärmeflussvektor. Wird die Beziehung (3.55) in den Gleichungen (3.53) und (3.54) berücksichtigt, dann erhält man die gesamte Wärmeleistung in Form von Gleichung

$$\mathcal{Q} = - \int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{R}_t} \rho r \, dv + \int_{\gamma^s} \mathbf{q}^s \cdot \mathbf{n}^s \, da^s + \int_{\gamma^m} \mathbf{q}^m \cdot \mathbf{n}^m \, da^m. \quad (3.56)$$

Wenn die Körper im Kontaktfall in Berührung stehen, dann sind die Flächennormalen des Punktpaares  $(\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})$  in der aktiven Zone antiparallel,  $\check{\mathbf{n}} \, da^m = -\mathbf{n}^s \, da^s$ , so dass sich Gleichung (3.56) weiter umformen lässt:

$$\mathcal{Q} = - \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \rho r \, dv + \int_{\gamma^s} (\mathbf{q}^s - \check{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{n}^s \, da^s, \quad (3.57)$$

**wobei die inaktiven Bereiche der Kontaktflächen als adiabat betrachtet werden.**

Mit den Ausdrücken für die zeitliche Änderung der innere Energie und der kinetischen Energie, sowie der Leistung der äußeren Kräfte und der Wärmeleistung, Gleichungen (3.25) und (3.35), sowie (3.52) und (3.57), erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_t} \rho \dot{e} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dv \\ & + \int_{\gamma^s} \frac{1}{j} \dot{e}_c \, da^s = \\ & \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div}(\mathbf{vT}) \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega T}_c) \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dv \\ & + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \rho r \, dv \\ & + \int_{\gamma^s} \check{p} \dot{g} \, da^s - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau \, da^s - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} \, da^s + \int_{\gamma^s} (\mathbf{q}^s - \check{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{n}^s \, da^s. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Mit Hilfe des Lokalisationstheorems (siehe z.B. GURTIN [34], S. 38) lässt sich diese Gleichung in lokaler Form angeben, wobei die Leistungsbilanz nicht nur für das gesamte System, sondern auch für jeden Teilbereich gilt. Man erhält dementsprechend zwei lokale Bilanzgleichungen,

$$\rho \dot{e} + \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div}(\mathbf{vT}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega T}_c) - \operatorname{div}(\mathbf{q}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho r, \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{j} \dot{e}_c = \check{p} \dot{g} - \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau - \mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{q}^s - \check{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{n}^s, \quad (3.60)$$

Gleichung (3.59) ist im Inneren der Körper und Gleichung (3.60) im aktiven Bereich der Kontaktfläche gültig.

Die mechanischen Bilanzgleichungen des Impulses und des Drehimpulses lassen sich anhand der Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (3.61)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_c + \mathbf{b}_c + \mathbf{t}_A = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.62)$$

in lokaler Form im Inneren der Körper einführen. Der CAUCHY'sche 'Spannungstensor lässt sich in symmetrische und antisymmetrische Teilspannungen  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A$  zerlegen. Aus dem antisymmetrischen Teil  $\mathbf{T}_A$  lässt sich über die Definition

$$\mathbf{t}_A := 2 \operatorname{axl} \mathbf{T}_A = 2 \operatorname{axl} \mathbf{T} \quad (3.63)$$

ein axialer Vektor gewinnen, so dass

$$\mathbf{t}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.64)$$

gilt, wobei die Größen  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\boldsymbol{\Omega}$  über die Operation  $\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_{kj}$ , bzw.  $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{axl}(\boldsymbol{\Omega})$  in Beziehung stehen. Nach Einarbeitung der Gleichungen (3.61) und (3.62) in die Gleichungen (3.59) und (3.60), erhält man für die lokalen Leistungsbilanzen

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{T}_c \cdot \dot{\mathbf{K}} - \operatorname{div}(\mathbf{q}) + \rho r, \quad (3.65)$$

$$\frac{1}{j} \dot{e}_c = \check{p} \dot{g} - \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau - \mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{q}^s - \check{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{n}^s, \quad (3.66)$$

Im Weiteren geht es darum, Materialgleichungen einzuführen, die mit allgemeinen Prinzipien der Kontinuumsmechanik verträglich sind. Insbesondere wird die ständige Erfüllung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik in Form einer Entropieproduktionsungleichung verlangt.

### 3.1.1 Entropiebilanz und zweiter Hauptsatz

Zunächst führt man eine energetische Größe, genannt Entropie, ein. Für eine Form der Entropiebilanz in der klassischen Mechanik siehe z.B. COLEMAN und NOLL [13]. Die gesamte Entropie eines Systems wird mit  $\mathcal{H}$  bezeichnet. Es wird postuliert, dass sich die Änderungsrate der Entropie,  $\dot{\mathcal{H}}$ , aus zwei Anteilen zusammensetzt,

$$\dot{\mathcal{H}} = \mathcal{N} + \mathcal{P}, \quad (3.67)$$

wobei  $\mathcal{N}$  ein Entropiefluss über die Systemgrenze und  $\mathcal{P}$  die Produktion von Entropie im System angeben.

Die gesamte Entropie des Systems setzt man genau wie die innere Energie aus zwei Anteilen zusammen,

$$\mathcal{H} := \int_{\mathcal{R}_t} \rho \eta \, dv + \int_{\gamma^s} \frac{1}{j} \eta_c \, da^s, \quad (3.68)$$

wobei  $\eta$  eine spezifische Entropiedichte im inneren eines Körpers darstellt.  $\eta_c$  bezeichnet die Entropieflächendichte auf dem gesamten Kontaktrand. Unter Berücksichtigung bekannter Transformationseigenschaften gilt für die Änderungsrate der Entropie in der Momentankonfiguration die Gleichung

$$\dot{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{R}_t} \rho \dot{\eta} \, dv + \int_{\gamma^s} \frac{1}{j} \dot{\eta}_c \, da^s. \quad (3.69)$$

Mit dieser Gleichung ist der Term auf der linken Seite der Bilanz (3.67) bestimmt. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Entropie, die über die Systemgrenze ausgetauscht wird. Es wird angenommen, dass der Entropiefluss von einer Flächen- und einer Volumendichteverteilung gebildet wird,

$$\mathcal{N} := \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \frac{\mathbf{q}}{\theta} da + \int_{\mathcal{R}_t} \rho \frac{\mathbf{r}}{\theta} dv. \quad (3.70)$$

wobei  $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$  die absolute Temperatur darstellt. Der Fluss durch  $\partial \mathcal{R}_t$  kann in die Bereiche

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \frac{\mathbf{q}}{\theta} da = \int_{\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma} \frac{\mathbf{q}}{\theta} da + \int_{\gamma^s} \frac{\mathbf{q}^s}{\theta^s} da^s + \int_{\gamma^m} \frac{\mathbf{q}^m}{\theta^m} da^m \quad (3.71)$$

aufgeteilt werden. Wird das CAUCHY'sche Fundamentaltheorem (3.55) mit einbezogen, dann gilt insgesamt

$$\mathcal{N} = - \int_{\partial \mathcal{R}_t} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{R}_t} \rho \frac{\mathbf{r}}{\theta} dv + \int_{\gamma^s} \left( \frac{\mathbf{q}^s}{\theta^s} - \frac{\check{\mathbf{q}}}{\check{\theta}} \right) \cdot \mathbf{n}^s da^s, \quad (3.72)$$

wobei  $\theta^s$  und  $\check{\theta}$  absolute Temperaturen an Punkten der Kontaktflächen bezeichnen. Es ist üblich, vektorielle Entropieflussdichten  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}^s$  und  $\check{\mathbf{S}}$  anhand der Definitionen

$$\mathbf{S} := \frac{\mathbf{q}}{\theta}, \quad \mathbf{S}^s := \frac{\mathbf{q}^s}{\theta^s}, \quad \check{\mathbf{S}} := \frac{\check{\mathbf{q}}}{\check{\theta}}, \quad (3.73)$$

einzuführen, so dass man schließlich den globalen Entropiefluss eines Kontaktproblems erhält:

$$\mathcal{N} = - \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{S} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \rho \frac{\mathbf{r}}{\theta} dv + \int_{\gamma^s} (\mathbf{S}^s - \check{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{n}^s da^s. \quad (3.74)$$

Man nimmt an, dass die gesamte Entropieproduktion aus einem volumetrischen Beitrag und aus einem Anteil der Kontaktfläche besteht,

$$\mathcal{P} := \int_{\mathcal{R}_t} \rho \pi dv + \int_{\gamma^s} \frac{1}{j} \pi_c da^s. \quad (3.75)$$

Die Größe  $\pi$  bezeichnet eine spezifische Entropieproduktion in  $\mathcal{R}_t$  während  $\pi_c$  die Produktionsdichte der Kontaktfläche darstellt.

Werden die Gleichungen (3.69), (3.74) und (3.75) in die globale Entropiebilanz (3.67) eingesetzt, dann lassen sich nach bekannter Argumentation die Gleichungen

$$\rho \dot{\eta} = -\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho \frac{\mathbf{r}}{\theta} + \rho \pi, \quad (3.76)$$

$$\frac{1}{j} \dot{\eta}_c = (\mathbf{S}^s - \mathbf{S}^m) \cdot \mathbf{n}^s + \frac{1}{j} \pi_c, \quad (3.77)$$

gewinnen, wobei Gleichung (3.76) im Körpervolumen gilt und Gleichung (3.77) im aktiven Bereich der Kontaktfläche.

Als zweiten Hauptsatz für das betrachtete System postuliert man die Gültigkeit von den Entropieproduktionsungleichungen

$$\pi \geq 0, \quad (3.78)$$

$$\pi_c \geq 0. \quad (3.79)$$

oder in äquivalenter Form

$$\rho \theta \pi \geq 0, \quad \frac{1}{j} \theta_c \pi_c \geq 0. \quad (3.80)$$

wobei  $\theta_c$  die absolute Temperatur in der Zwischenschicht des Kontaktbereichs bedeutet. Eine alternative Form der Entropiebilanzen (3.76) und (3.77) erhält man, indem mit der absoluten Temperatur durchmultipliziert und Definitionen (3.80) verwendet wird,

$$\rho \dot{\eta} \theta = -\text{div}(\mathbf{S}\theta) + \rho r + \mathbf{S} \cdot \text{grad}\theta + \rho \theta \pi, \quad (3.81)$$

$$\frac{1}{j} \dot{\eta}_c \theta_c = \theta_c (\mathbf{S}^s - \mathbf{S}^m) \cdot \mathbf{n}^s + \rho \theta \pi_c. \quad (3.82)$$

Üblicherweise arbeitet man in der Plastizitätstheorie nicht mit inneren Energie sondern mit der freien Energie. Deswegen wird an dieser Stelle eine freie Energiefunktionen über die Gleichungen

$$e = \Psi + \theta \eta, \quad (3.83)$$

$$e_c = \Psi_c + \theta_c \eta_c, \quad (3.84)$$

eingeführt. Zusammen mit diesen Gleichungen arbeitet man die Energiebilanzen (3.65) und (3.66) in die Gleichungen (3.81) und (3.82) ein und erhält

$$\rho \theta \pi = \mathbf{T} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}} + \mathbf{T}_c \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}} - \mathbf{S} \cdot \text{grad}\theta - \rho \eta \dot{\theta} - \rho \dot{\Psi} \geq 0, \quad (3.85)$$

$$\rho \theta_c \pi_c = \check{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau - \mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} - \theta_c (\mathbf{S}^s - \mathbf{S}^m) \cdot \mathbf{n}^s - \frac{1}{j} \eta_c \dot{\theta}_c - \frac{1}{j} \dot{\Psi}_c \geq 0, \quad (3.86)$$

wobei in (3.85) Gleichung (2.52) berücksichtigt wird.

## 3.2 Materialgleichungen für mikropolare Plastizität

Die Materialien, die in dieser Arbeit untersucht werden, weisen im Volumen sowohl elastisches (reversibel) als auch plastisches (irreversibles) Verhalten auf. Die Elastizität ist an jedem Prozess beteiligt, während plastische Bewegungen erst bei materialabhängigen Grenzbeanspruchungen einsetzen. In Zusammenhang mit Kontaktflächen sind es Haftungs- bzw. Reibungsprozesse, die als reversibel bzw. dissipativ angenommen werden.

Zur grundlegenden Literatur der klassischen Plastizitätstheorie zählen LIPPMANN [53], LUBLINER [55], CHAKRABARTY [11], NEMAT-NASSER [61], KAHN und HUANG [43] und GURTIN, FRIED und ANAND [35].

In mikropolarer Plastizität wird davon ausgegangen, dass  $\Psi$  eine Funktion der mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren, der absoluten Temperatur und ansonsten eines Satzes plastischer innerer Variablen ist. Insbesondere soll  $\Psi$  nicht von den Geschwindigkeiten der (Zustands-)Variablen abhängen. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass für die Entropieungleichung (3.85) die hinreichenden Bedingungen

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} + \mathbf{T}_c \cdot \dot{\hat{\mathbf{K}}} - \rho \eta \dot{\theta} - \rho \dot{\Psi} \geq 0, \quad (3.87)$$

$$-\mathbf{S} \cdot \text{grad} \theta \geq 0 \quad (3.88)$$

gelten. Diese sind übliche Annahmen in der Kontinuumsmechanik und separieren die Entropieungleichung in mechanische und thermische Anteile. Für den Rest der Arbeit werden nur isotherme Prozesse betrachtet. Darüber hinaus wird eine gleichförmige Temperaturverteilung angenommen, was für sehr langsam (unendlich langsam) ablaufende Prozesse erreicht werden kann. Damit bleibt nur die Ungleichung

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} + \mathbf{T}_c \cdot \dot{\hat{\mathbf{K}}} - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.89)$$

übrig. Mit  $\theta = \text{konst}$  ist die im Weiteren dargestellte Theorie rein mechanischer Natur. Es wird davon ausgegangen, dass bei mikropolaren Materialien die freie Energiefunktion anhand von

$$\Psi = \Psi \left( \mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}, \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (3.90)$$

dargestellt werden kann. Eine reduzierte Form (für allgemeine reduzierte konstitutive Gesetze siehe z.B. BERTRAM und SVENDSEN [8]) kann aus (3.90) hergeleitet werden, siehe GRAMMENOUDIS und TSAKMAKIS [31]:

$$\Psi = \Psi (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\mathbf{K}}). \quad (3.91)$$

---

### 3.2.1 Elastizität

---

Man orientiert sich an einer üblichen Vorgehensweise in der klassischen Plastizitätstheorie und nimmt an, dass sich die freie Energiefunktion eines mikropolaren Materials aus elastischen und plastischen Anteilen additiv zusammensetzt,

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_p. \quad (3.92)$$

Aus den Gleichungen (2.91) und (2.92) ist eine elastoplastische Zerlegung der mikropolaren Verzerrungen und Krümmungen bekannt. Man legt fest, dass der elastische Energieanteil in Gleichung (3.92) nur von elastischen Deformationsgrößen abhängt. Bezüglich der Zwischenkonfiguration  $\mathcal{R}_t$  erhält man damit eine Funktion

$$\Psi_e = \Psi_e (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e). \quad (3.93)$$



Über eine materielle Zeitableitung des elastischen Anteils (3.93) erhält man die Gleichung

$$\dot{\Psi}_e = \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_e + \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e. \quad (3.94)$$

Eine Transformation der Ungleichung (3.89) in die Zwischenkonfiguration und Einsetzen der zeitlichen Ableitung der freien Energie, Gleichung (3.94), liefert die Ungleichung

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}} + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}} - \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_e - \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e - \tilde{\rho} \dot{\Psi}_p \geq 0. \quad (3.95)$$

Gemäß des Konzeptes der dualen Variablen (HAUPT und TSAKMAKIS [37] und [38]) definiert man dabei Spannungstensoren auf der Referenz- und Zwischenkonfiguration mittels der Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{T}} := \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1}, \quad (3.96)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_c := \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{T}_c \mathbf{F}^{T-1}, \quad (3.97)$$

$$\hat{\mathbf{T}} := \bar{\mathbf{R}}_p \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}_p^T, \quad (3.98)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c := \bar{\mathbf{R}}_p \tilde{\mathbf{T}}_c \mathbf{F}_p^T, \quad (3.99)$$

siehe auch GRAMMENOUDIS [27]. Mit der objektiven elastischen Verzerrungsgeschwindigkeit, Definition (2.96), der Zerlegung des plastischen Geschwindigkeitsgradienten, Gleichung (2.101), und der additive Zerlegung der mikropolaren Verzerrung auf der Zwischenkonfiguration, Gleichung (2.91), kann Ungleichung (3.95) auf die Form

$$\begin{aligned} & \left( \hat{\mathbf{T}} - \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \right) \cdot \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}} + \tilde{\rho} \left( \mathbf{1} + (\hat{\epsilon}_e)^T \right) \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p \\ & + \left( \hat{\mathbf{T}}_c - \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p + \tilde{\rho} (\hat{\mathbf{K}}_e)^T \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p \\ & + \tilde{\rho} \left( (\hat{\epsilon}_e)^T \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} (\hat{\epsilon}_e)^T \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \\ & + \tilde{\rho} \left( (\hat{\mathbf{K}}_e)^T \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} (\hat{\mathbf{K}}_e)^T \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p - \tilde{\rho} \dot{\Psi}_p \geq 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

gebracht werden. Standardargumente, siehe COLEMAN und GURTIN [12], führen auf die Beziehungen

$$\hat{\mathbf{T}} = \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_e(\hat{\epsilon}, \hat{\mathbf{K}}_e)}{\partial \hat{\epsilon}_e} = \tilde{\rho} \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\epsilon}_e} \mathbf{F}_p^T, \quad (3.101)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c = \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_e(\hat{\epsilon}, \hat{\mathbf{K}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} = \tilde{\rho} \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_e} \mathbf{F}_p^T. \quad (3.102)$$

Beide Ausdrücke (3.101) und (3.102) stellen hyperelastische Elastizitätsgesetze dar. Mit der Einführung allgemeiner isotroper Materialtensoren vierter Stufe  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$  definiert man die freie Energiefunktion in Anlehnung an ERINGEN: [23],

$$\Psi_e = \Psi_e(\hat{\mathbf{e}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e) := \frac{1}{2\tilde{\rho}} \hat{\mathbf{e}}_e \cdot \mathbb{C}[\hat{\mathbf{e}}_e] + \frac{1}{2\tilde{\rho}} \hat{\mathbf{K}}_e \cdot \mathbb{D}[\hat{\mathbf{K}}_e]. \quad (3.103)$$

Aus dieser Definition erhält man die Elastizitätsgesetze in Form der Gleichungen

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbb{C}[\hat{\mathbf{e}}_e], \quad (3.104)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c = \mathbb{D}[\hat{\mathbf{K}}_e]. \quad (3.105)$$

Mit den Definitionen

$$\mathbb{C} := \lambda \mathbb{I}^{vol} + (\mu + \alpha) \mathbb{I} + (\mu - \alpha) \mathbb{I}^{trans}, \quad (3.106)$$

$$\mathbb{D} := \beta \mathbb{I}^{vol} + (\gamma + \delta) \mathbb{I} + (\gamma - \delta) \mathbb{I}^{trans}, \quad (3.107)$$

lassen sich die Elastizitätsgesetze auch anhand der Ausdrücke

$$\hat{\mathbf{T}} = \lambda \text{Sp}(\hat{\mathbf{e}}_e) \mathbf{1} + (\mu + \alpha) \hat{\mathbf{e}}_e + (\mu - \alpha) \hat{\mathbf{e}}_e^T, \quad (3.108)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c = \beta \text{Sp}(\hat{\mathbf{K}}_e) \mathbf{1} + (\gamma + \delta) \hat{\mathbf{K}}_e + (\gamma - \delta) \hat{\mathbf{K}}_e^T \quad (3.109)$$

darstellen. Die Größen  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\alpha$  bzw.  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  stellen Materialparameter für das elastische Verhalten dar. Aus der Eigenschaft allgemeiner Isotropie der Materialtensoren folgt die Symmetrie der letzten beiden Klammerausdrücke in Gleichung (3.100), so dass beispielsweise  $\hat{\mathbf{e}}_e^T \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{e}}_e^T = (\mu - \alpha) (\hat{\mathbf{e}}_e^T \hat{\mathbf{e}}_e - \hat{\mathbf{e}}_e \hat{\mathbf{e}}_e^T)$  mit  $\hat{\mathbf{e}}_e \hat{\mathbf{e}}_e^T = (\hat{\mathbf{e}}_e \hat{\mathbf{e}}_e^T)^T$ . Damit verschwinden die beiden vorletzten Terme in Ungleichung (3.100),

$$(\hat{\mathbf{e}}_e^T \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{e}}_e^T) \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_p = 0, \quad (3.110)$$

$$(\hat{\mathbf{K}}_e^T \hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\mathbf{T}}_c \hat{\mathbf{K}}_e^T) \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_p = 0. \quad (3.111)$$

Auf Grund der zu  $\hat{\mathbf{e}}_p^\Delta$  proportionalen Terme in (3.100) ist es in der Plastizitätstheorie großer Deformationen üblich, einen neuen Spannungstensor

$$\hat{\mathbf{P}} := (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{e}}_e^T) \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{K}}_e^T \hat{\mathbf{T}}_c \quad (3.112)$$

einzuführen. Die Größe  $\hat{\mathbf{P}}$  wird in Analogie zur klassischen Plastizität als MANDEL'scher Spannungstensor bezeichnet (vgl. TSAKMAKIS [80]). In diesem Zusammenhang wird auf den Leistungsanteil  $\hat{\mathbf{K}}_e^T \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \hat{\mathbf{e}}_p^\Delta$  in Gleichung (3.100) hingewiesen, der aus makro- und mikroskopischen Größen gebildet wird. Bei einem Übergang zu einer Theorie mit kleinen Deformationen verschwindet der Term  $\hat{\mathbf{e}}_e^T \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{K}}_e^T \hat{\mathbf{T}}_c$  in der Spannung  $\hat{\mathbf{P}}$ . Mit Hilfe von (3.101) bis (3.112) reduziert sich die Ungleichung (3.100) schließlich auf die mechanische Restungleichung

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_p^\Delta + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \hat{\mathbf{K}}_p^\Delta - \tilde{\rho} \dot{\Psi}_p \geq 0. \quad (3.113)$$

### 3.2.2 Das Postulat von IL'USHIN

Zur Auswertungen der Ungleichung (3.113) greift man auf eine Annahme der Plastizitätstheorie zurück, die als Postulat von IL'USHIN bezeichnet wird, siehe zum Beispiel TSAKMAKIS [81], [82] und [83].

Die Ungleichung (3.113) legt nahe, eine Fließfunktion  $f$  auf der Zwischenkonfiguration einzuführen,

$$f = f(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{T}}_c, \alpha_i), \quad (3.114)$$

wobei mit den Größen  $\alpha_i$  die Komponenten eines Satzes plastischer Variablen bezeichnet werden. Unter Berücksichtigung der Elastizitätsgesetze lässt sich die Fließfunktion (3.114) auch in Abhängigkeit von mikropolaren Verzerrungen und Krümmungen angeben. Die Funktion  $f$  ist letztendlich in Abhängigkeit der Größen  $\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon}_p$  und  $\tilde{\mathbf{K}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_p$  sowie eines Satzes innerer Variablen  $q_i$  bezüglich der Referenzkonfiguration darstellbar,

$$f = f(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p, q_i). \quad (3.115)$$

Die Bedingung

$$f = f(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p, q_i) = 0 \quad (3.116)$$

wird als eine Fläche im Raum der Verzerrungen und Krümmungen aufgefasst, die den Rand des Bereiches elastischer Deformationen bildet. Während plastischer Verfestigungsprozesse darf sich die Position und Gestalt der Fließfläche anhand bestimmter Gesetzmäßigkeiten ändern. Das Postulat von Il'ushin bezieht sich auf die geleistete plastische Arbeit  $I$  während eines kleinen Deformationszyklus in einem Zeitintervall  $[t^A, t^D]$  mit  $t^A < t^D$ . Einem Vorschlag von LUCCHESI und SILHAVY [56] folgend bedeutet in diesem Sinne ein kleiner Deformationszyklus, dass sich die Anfangsdeformationen  $\tilde{\epsilon}(t^A) = \tilde{\epsilon}_A$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}(t^A) = \tilde{\mathbf{K}}_A$  nach einem Deformationszyklus zum Endzeitpunkt  $t_D$  noch immer innerhalb der Fließfläche befinden. In Form einer Ungleichung erhält das Postulat eine Darstellung

$$\begin{aligned} I(t_A, t_D) &:= \frac{1}{\tilde{\rho}} \int_{t_A}^{t_D} (\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} + \tilde{\mathbf{T}}_c \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_D} \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\epsilon}} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} dt + \int_{t_A}^{t_D} \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\mathbf{K}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}} dt \geq 0, \end{aligned} \quad (3.117)$$

wobei man die Elastizitätsgesetze (3.101) und (3.102) verwendet. Zur Umformung der Ungleichung (3.117) gibt es Standardschritte, die in GRAMMENOU DIS und TSAKMAKIS [28] ausführlich beschrieben sind. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, wird hier eine äquivalente Darstellung in der Form

$$\begin{aligned} I(t_A, t_D) &= \int_{t_B}^{t_C} \left\{ \left( \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}_A, \tilde{\epsilon}^p(t), \tilde{\mathbf{K}}_A, \tilde{\mathbf{K}}^p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}^p} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \tilde{\epsilon}^p} \right) \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}^p \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}_A, \tilde{\epsilon}^p(t), \tilde{\mathbf{K}}_A, \tilde{\mathbf{K}}^p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}^p} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \tilde{\mathbf{K}}^p} \right) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}^p \right\} dt \geq 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

angegeben, wobei  $t_B$  und  $t_C$  Anfangs- und Endzeitpunkt des plastischen Fließens bezeichnen. Insgesamt gilt somit  $t_A < t_B < t_C < t_D$ . Mit Hilfe einer TAYLOR-Entwicklung erhält man daraus

$$\lim_{t^C \rightarrow t^B} \frac{I(t_A, t_D)}{t_C - t_B} = \left\{ \left( \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}_A, \tilde{\epsilon}^p(t), \tilde{\mathbf{K}}_A, \tilde{\mathbf{K}}^p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \right) \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p + \left( \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}_A, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}_A, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p} \right) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p \right\} \geq 0. \quad (3.119)$$

In der Referenzkonfiguration ergibt sich schließlich die Ungleichung

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}^p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}^p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p - \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}^p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}^p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p \\ & \geq - \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}_A, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}_A, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p - \frac{\partial \Psi_e(\tilde{\epsilon}_A, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}_A, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (3.96)–(3.99), (3.101) und (3.102) wird diese Ungleichung in die Zwischenkonfiguration transformiert:

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\tilde{\epsilon}}_p^\Delta + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_p^\Delta \geq \hat{\mathbf{P}}_A \cdot \hat{\tilde{\epsilon}}_p^\Delta + (\hat{\mathbf{T}}_c)_A \cdot \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_p^\Delta. \quad (3.121)$$

Um aus  $\hat{\tilde{\mathbf{K}}}_p$  ein dimensionsloses Krümmungsmaß zu bilden, wird oft mit dem Produkt  $l \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_p$  gearbeitet, wobei  $l$  ein Materialparameter ist. Dieser Parameter besitzt die Dimension einer Länge und stellt somit eine charakteristische (interne) Länge des Materials dar. Mit der Einführung allgemeiner Verzerrungs- und Spannungsvektoren

$$\hat{\Lambda}_p := \begin{pmatrix} \hat{\tilde{\epsilon}}_p \\ l \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_p \end{pmatrix}, \quad \hat{\tilde{\Lambda}}_p := \begin{pmatrix} \hat{\tilde{\epsilon}}_p^\Delta \\ l \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_p^\Delta \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} := \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} \\ \frac{1}{l} \hat{\mathbf{T}}_c \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

wird aus Ungleichung (3.121)

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{\tilde{\Lambda}}_p \geq \hat{\sigma}_A \cdot \hat{\tilde{\Lambda}}_p. \quad (3.123)$$

Diese Aussage muss für alle zulässigen Spannungen  $\hat{\sigma}_A$  erfüllt sein. Notwendige und hinreichende Bedingung zur Erfüllung der Ungleichung (3.123) ist die sogenannte Normalenregel zusammen mit der Konvexität der Fließfunktion.

---

### Normalenregeln

---

Mit der Fließfunktion in der Darstellung

$$f(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{T}}_c, \alpha_i) = f(\hat{\sigma}, \alpha_i) \quad (3.124)$$

ergeben sich aus dem Postulat von Il'ushin Normalenregeln für die plastischen Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten,

$$\overset{\Delta}{\hat{\Lambda}}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}}, \quad (3.125)$$

bzw.

$$\overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}}, \quad (3.126)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c}. \quad (3.127)$$

Diese Gleichungen können nach dem noch unbekannten gemeinsamen Faktor  $\lambda$  aufgelöst werden. Der als plastischer Multiplikator bezeichnete Proportionalitätsfaktor lässt sich mit den Definitionen

$$\dot{s} := \|\overset{\Delta}{\hat{\Lambda}}_p\| = \sqrt{\overset{\Delta}{\hat{\Lambda}}_p \cdot \overset{\Delta}{\hat{\Lambda}}_p} = \sqrt{\overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p \cdot \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p + l^2 \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p}, \quad (3.128)$$

$$\zeta := \left\| \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} \right\| = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}}} = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}} + l^2 \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c}} \quad (3.129)$$

als Quotient darstellen:

$$\lambda = \frac{\dot{s}}{\zeta}. \quad (3.130)$$

Die Größe  $\dot{s}$  stellt die Änderungsrate der plastischen Bogenlänge dar,  $\zeta$  bezeichnet die Norm des Spannungsgradienten der Fließfunktion. Die Fließ- oder Normalenregel kann damit durch die Gleichungen

$$\overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}}, \quad (3.131)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c}, \quad (3.132)$$

bzw.

$$\overset{\Delta}{\hat{\Lambda}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}}, \quad (3.133)$$

ausgedrückt werden.

### 3.2.3 Verfestigungsregeln

Isotrope und kinematische Verfestigungseffekte werden über ein skalarwertiges  $r$  und eine vektorwertige Größe  $\hat{\mathbf{y}}$  beschrieben,

$$\text{isotrope Verfestigung :} \quad r, \quad (3.134)$$

$$\text{kinematische Verfestigung :} \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_k \\ \hat{\mathbf{K}}_k \end{pmatrix}, \quad (3.135)$$

wobei die Tensoren  $\hat{\mathbf{e}}_k$  und  $\hat{\mathbf{K}}_k$  dem Raum der Verzerrungen und Krümmungen angehören. Man definiert die objektiven Änderungsraten in Analogie zu den objektiven Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten (siehe (2.78) und (2.79)):

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_k := \dot{\hat{\mathbf{e}}}_k + \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\mathbf{\Omega}}_p \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (3.136)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_k := \dot{\hat{\mathbf{K}}}_k + \hat{\mathbf{K}}_k \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\mathbf{\Omega}}_p \hat{\mathbf{K}}_k. \quad (3.137)$$

Darüber hinaus wird eine Zerlegung

$$\hat{\mathbf{e}}_p = \hat{\mathbf{e}}_k + \hat{\mathbf{e}}_d, \quad (3.138)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_p = \hat{\mathbf{K}}_k + \hat{\mathbf{K}}_d, \quad (3.139)$$

angenommen, so dass

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_p = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_k + \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_d, \quad (3.140)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_k + \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_d. \quad (3.141)$$

Die Anteile  $\hat{\mathbf{e}}_d$  und  $\hat{\mathbf{K}}_d$  geben dissipative Größen im Verzerrungs- und Krümmungsraum an. Man nimmt an, dass die plastische freie Energie in isotrope und kinematische Verfestigungsanteile additiv zerlegt werden kann (vgl. DIEGELE, JAHNSON und TSAKMAKIS [19]):

$$\Psi_p(t) = \Psi_{kin}(t) + \Psi_{iso}(t), \quad (3.142)$$

wobei von den Abhängigkeiten

$$\Psi_p(t) = \Psi_{iso}(r) + \Psi_{kin}(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{K}}_k) \quad (3.143)$$

ausgegangen wird. Die materielle Zeitableitung der Funktion  $\Psi_p$  führt auf

$$\dot{\Psi}_p = \frac{\partial \Psi_{kin}}{\partial \hat{\mathbf{e}}_k} \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}}_k + \frac{\partial \Psi_{kin}}{\partial \hat{\mathbf{K}}_k} \cdot \dot{\hat{\mathbf{K}}}_k + \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial r} \dot{r}. \quad (3.144)$$

Anhand dieser Ableitungen können die thermodynamisch konjugierten Kräfte

$$\hat{\xi} := \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_{kin}(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{K}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{e}}_k}, \quad (3.145)$$

$$\hat{\xi}_c := \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_{kin}(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{K}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{K}}_k}, \quad (3.146)$$

$$R := \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_{iso}(r)}{\partial r}, \quad (3.147)$$

definiert werden. Wenn man (3.144) zusammen mit diesen Definitionen in die Dissipationsungleichung (3.113) einsetzt, erhält man nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p) \cdot \hat{\hat{\mathbf{e}}}_p + (\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c) \cdot \hat{\hat{\mathbf{K}}}_p + \hat{\xi} \cdot \hat{\hat{\mathbf{e}}}_d + \hat{\xi}_c \cdot \hat{\hat{\mathbf{K}}}_d \\ & + \left( (\hat{\mathbf{e}}_k)^T \hat{\xi} - \hat{\xi} (\hat{\mathbf{e}}_k)^T \right) \cdot \hat{\hat{\mathbf{n}}}_p + \left( (\hat{\mathbf{K}}_k)^T \hat{\xi}_c - \hat{\xi}_c (\hat{\mathbf{K}}_k)^T \right) \cdot \hat{\hat{\mathbf{n}}}_p - \text{Rr} \geq 0, \end{aligned} \quad (3.148)$$

wobei es hilfreich ist in Analogie zu den MANDEL'schen Spannungen ebenfalls MANDEL'sche *back-stresses* zu definieren (siehe TSAKMAKIS [81]):

$$\hat{\xi}_p := \left( \mathbf{1} - (\hat{\mathbf{e}}_k)^T \right) \hat{\xi} - (\hat{\mathbf{K}}_k)^T \hat{\xi}_c. \quad (3.149)$$

Es sei bemerkt, dass der Leistungsanteil  $(\hat{\mathbf{K}}_k)^T \hat{\xi}_c \cdot \hat{\hat{\mathbf{e}}}_p$  nur in Theorien großer Deformationen vorkommt. Man definiert kinematische und isotrope freie Energiefunktionen anhand der Gleichungen

$$\Psi_k = \Psi_k(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{K}}_k) := \frac{1}{2\tilde{\rho}} \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \mathbb{H}[\hat{\mathbf{e}}_k] + \frac{1}{2\tilde{\rho}} \hat{\mathbf{K}}_k \cdot \mathbb{H}_c[\hat{\mathbf{K}}_k]. \quad (3.150)$$

$$\Psi_{iso} = \Psi_{iso}(\mathbf{r}) := \frac{1}{2\tilde{\rho}} \gamma^{(iso)} \mathbf{r}^2. \quad (3.151)$$

Aus den Definitionen der freien Energien, Gleichungen (3.150) und (3.151) und den Verfestigungsgesetzen (3.145) und (3.146) erhält man die Materialgesetze der *back-stress*- und isotropen Spannungen,

$$\hat{\xi} = \mathbb{H}[\hat{\mathbf{e}}_k], \quad (3.152)$$

$$\hat{\xi}_c = \mathbb{H}_c[\hat{\mathbf{K}}_k], \quad (3.153)$$

$$\mathbf{R} = \gamma^{(iso)} \mathbf{r}. \quad (3.154)$$

Analog zur Elastizität werden in den Materialgesetzen der kinematischen Verfestigung allgemein isotrope Tensoren vierter Stufe eingeführt,

$$\mathbb{H} := c_1 \mathbb{I}^{vol} + (c_2 + c_3) \mathbb{I} + (c_2 - c_3) \mathbb{I}^{trans}, \quad (3.155)$$

$$\mathbb{H}_c := c_4 \mathbb{I}^{vol} + (c_5 + c_6) \mathbb{I} + (c_5 - c_6) \mathbb{I}^{trans}. \quad (3.156)$$

Die Größen  $c_1$  bis  $c_6$  stellen Materialparameter dar. Aus Symmetrieeigenschaften folgt, dass in Ungleichung (3.148) die inneren Produkte in Verbindung mit den antisymmetrischen Spintensoren verschwinden:

$$\left( (\hat{\mathbf{e}}_k)^T \hat{\xi} - \hat{\xi} (\hat{\mathbf{e}}_k)^T \right) \cdot \hat{\hat{\mathbf{n}}}_p = 0, \quad (3.157)$$

$$\left( (\hat{\mathbf{K}}_k)^T \hat{\xi}_c - \hat{\xi}_c (\hat{\mathbf{K}}_k)^T \right) \cdot \hat{\hat{\mathbf{n}}}_p = 0. \quad (3.158)$$

Die Dissipationsungleichung (3.148) reduziert sich damit auf den Ausdruck

$$(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p) \cdot \hat{\hat{\mathbf{e}}}_p + (\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c) \cdot \hat{\hat{\mathbf{K}}}_p + \hat{\xi} \cdot \hat{\hat{\mathbf{e}}}_d + \hat{\xi}_c \cdot \hat{\hat{\mathbf{K}}}_d - \text{Rr} \geq 0. \quad (3.159)$$

der offensichtlich von den restriktiveren Dissipationsungleichungen

$$(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p) \cdot \hat{\hat{\mathbf{e}}}_p + (\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c) \cdot \hat{\hat{\mathbf{K}}}_p - R \dot{r} \geq 0, \quad (3.160)$$

$$\hat{\xi} \cdot \hat{\hat{\mathbf{e}}}_d + \hat{\xi}_c \cdot \hat{\hat{\mathbf{K}}}_d \geq 0 \quad (3.161)$$

erfüllt wird.

Mit der Einführung MANDEL'scher *back-stresses* kann man für die Fließfunktion unter Berücksichtigung kinematischer Verfestigung einen konkreten Ausdruck annehmen, siehe z.B. DE BORST [9]:

$$f := \sqrt{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p)^D \cdot \mathbb{A} [\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p]^D + (\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c)^D \cdot \mathbb{A}_c [\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c]^D} - k. \quad (3.162)$$

Die Tensoren  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{A}_c$  stellen allgemein isotrope Tensoren vierter Stufe dar,

$$\mathbb{A} := (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbb{I} + (\alpha_1 - \alpha_2) \mathbb{I}^{trans}, \quad (3.163)$$

$$\mathbb{A}_c := (\alpha_3 + \alpha_4) \mathbb{I} + (\alpha_3 - \alpha_4) \mathbb{I}^{trans}, \quad (3.164)$$

wobei die Größen  $\alpha_1$  bis  $\alpha_4$  Materialparameter bezeichnen. Der Spuranteil muss in diesen Definitionen nicht berücksichtigt werden, da er bei der Anwendung auf deviatorische Tensoren verschwindet. Die Größe  $k$  wird häufig als Fließspannung oder Fließgrenze bezeichnet. Die in den Normalenregeln (3.131) und (3.132) enthaltenen Gradienten ergeben mit Definition (3.162) die Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \frac{1}{f + k} \mathbb{A} [\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p]^D, \quad (3.165)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c} = \frac{1}{f + k} \mathbb{A}_c [\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c]^D. \quad (3.166)$$

---

### Isotrope Verfestigung

---

Sei  $k_0$  eine nicht-negative konstante Anfangsfließspannung, so dass für die Fließspannung  $k$  gilt:

$$k = k_0 + R. \quad (3.167)$$

Für die Fließfunktion aus (3.114) nimmt man die Beziehungen

$$f = f(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{T}}_c, \alpha_i) = f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \alpha_i) = f^*(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) - k \quad (3.168)$$

an, wobei

$$\hat{\boldsymbol{\chi}} := \begin{pmatrix} \xi_p \\ \frac{1}{l} \xi_c \end{pmatrix}, \quad (3.169)$$



so dass

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} = \frac{\partial f^*}{\partial (\hat{\sigma} - \hat{\chi})}. \quad (3.170)$$

Unter Verwendung der Vektoren (3.122) und (3.169) lässt sich Ungleichung (3.160) auch in der Form

$$(\hat{\sigma} - \hat{\chi}) \cdot \hat{\Lambda}_p - R\dot{r} \geq 0 \quad (3.171)$$

darstellen. Durch Einsetzen von (3.170) in (3.133) entsteht

$$\hat{\Lambda}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f^*}{\partial (\hat{\sigma} - \hat{\chi})}, \quad (3.172)$$

und damit aus (3.171)

$$(\hat{\sigma} - \hat{\chi}) \cdot \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f^*}{\partial (\hat{\sigma} - \hat{\chi})} - R\dot{r} \geq 0. \quad (3.173)$$

Es wird angenommen, dass  $f^*(0) = 0$  gilt und dass  $f^*$  eine homogene Funktion ersten Grades ist, so dass aus dem Theorem von EULER für homogene Funktionen folgt:

$$(\hat{\sigma} - \hat{\chi}) \cdot \frac{\partial f^*}{\partial (\hat{\sigma} - \hat{\chi})} = f^* \quad (3.174)$$

Wenn plastische Geschwindigkeiten nicht verschwinden, dann gilt stets

$$f = f^* - k = 0 \Leftrightarrow f^* = k. \quad (3.175)$$

Dies wird in (3.173) eingesetzt, dann greift man auf (3.167) zurück und erhält die Ungleichung

$$k_0 \frac{\dot{s}}{\zeta} + R \left( \frac{\dot{s}}{\zeta} - \dot{r} \right) \geq 0. \quad (3.176)$$

Eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung dieser Ungleichung erhält man durch die Annahme einer einfachen Differentialgleichung:

$$\dot{r} = \frac{\dot{s}}{\zeta} (1 - \beta^{(iso)} r) \Rightarrow r \geq 0. \quad (3.177)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und dem Materialgesetz (3.154) zusammen mit (3.167) gelangt man schließlich zur Evolutionsgleichung für die Fließspannung

$$\dot{k} = \frac{\dot{s}}{\zeta} \left( \gamma^{(iso)} - \beta^{(iso)} (k - k_0) \right). \quad (3.178)$$

---

## Kinematische Verfestigung

---

Um Ungleichung (3.161) zu erfüllen, ist es hinreichend, die dissipativen Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten durch die konstitutiven Gleichungen

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_d = \mathbb{M} [\hat{\xi}], \quad (3.179)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_d = \mathbb{M}_c [\hat{\xi}_c] \quad (3.180)$$

zu ersetzen. Die vierstufigen Materialtensoren  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{M}_c$  müssen dafür jeweils positiv semi-definit sein und die Dimension einer Änderungsrate besitzen. Die Evolutionsgleichungen der kinematischen Verfestigung ergeben sich damit aus Zerlegungen (3.140) und (3.141),

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_k = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_p - \mathbb{M} [\hat{\xi}] = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}} - \mathbb{M} [\hat{\xi}], \quad (3.181)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_k = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \mathbb{M}_c [\hat{\xi}_c] = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c} - \mathbb{M}_c [\hat{\xi}_c], \quad (3.182)$$

was einem Armstrong-Frederick-Ansatz entspricht. Die Materialtensoren in diesen Gleichungen lassen sich als vierstufige isotrope Tensoren einführen,

$$\mathbb{M} := \dot{s} \left( b_1 \mathbb{I}^{vol} + (b_2 + b_3) \mathbb{I} + (b_2 - b_3) \mathbb{I}^{trans} \right), \quad (3.183)$$

$$\mathbb{M}_c := \dot{s} \left( b_4 \mathbb{I}^{vol} + (b_5 + b_6) \mathbb{I} + (b_5 - b_6) \mathbb{I}^{trans} \right). \quad (3.184)$$

Häufig liegen die *back-stress*-Tensoren in Form von Deviatoren vor. Der Spuranteil kann dann in diesen Definitionen vernachlässigt werden.

---

## Separate makro- und mikroskopische Fließfunktionen

---

Für eine rein akademische Untersuchung, d.h. ohne physikalische Notwendigkeit, wird nun anstatt einer Fließfunktion für die isotrope Verfestigung von zwei separaten Fließfunktionen für makro- und mikroskopische isotrope Verfestigungen ausgegangen:

$$f = f(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\xi}_p, k), \quad (3.185)$$

$$f_c = f_c(\hat{\mathbf{T}}_c, \hat{\xi}_c, k_c), \quad (3.186)$$

Wie man zeigen, besitzt das Postulat von ILUSHIN auch bei einer separaten Betrachtung Gültigkeit, so dass die Normalenregeln

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}}, \quad (3.187)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c}. \quad (3.188)$$

folgen. Zur Darstellung der plastischen Multiplikatoren  $\lambda$  und  $\lambda_c$  werden separate Änderungsraten der plastischen Bogenlänge und separate Normen der Spannungsgradienten definiert:

$$\dot{s} := \sqrt{\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_p \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_p}, \quad \zeta := \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{p}}}}, \quad (3.189)$$

$$\dot{s}_c := \sqrt{\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p}, \quad \zeta_c := \sqrt{\frac{\partial f_c}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c} \cdot \frac{\partial f_c}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c}}. \quad (3.190)$$

Die plastischen Multiplikatoren sind damit über die Gleichungen

$$\lambda = \frac{\dot{s}}{\zeta}, \quad \lambda_c = \frac{\dot{s}_c}{\zeta_c} \quad (3.191)$$

bestimmt. Man erhält die separaten Fließ- oder Normalenregeln somit in Form der Gleichungen

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}} = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{p}}}, \quad (3.192)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p = \frac{\dot{s}_c}{\zeta_c} \frac{\partial f_c}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c}. \quad (3.193)$$

Es wird von isotropen Verfestigungsvariablen  $r$  und  $r_c$  ausgegangen und eine freie Energiefunktion

$$\Psi_{iso} = \Psi_{iso}(r, r_c) = \frac{1}{2\tilde{\rho}} \gamma^{(iso)} r^2 + \frac{1}{2\tilde{\rho}} \gamma_c^{(iso)} r_c^2 \quad (3.194)$$

angenommen, so dass man anstatt (3.143) von einer Zerlegung

$$\Psi_p(t) = \Psi_{iso}(r, r_c) + \Psi_{kin}(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{K}}_k) \quad (3.195)$$

ausgeht. Damit erhält man separate isotrope Verfestigungsspannungen

$$\mathbf{R} := \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_{iso}(r, r_c)}{\partial r}, \quad (3.196)$$

$$\mathbf{R}_c := \tilde{\rho} \frac{\partial \Psi_{iso}(r, r_c)}{\partial r_c}. \quad (3.197)$$

und aus (3.194) die Materialgesetze

$$\mathbf{R} = \gamma^{(iso)} r, \quad (3.198)$$

$$\mathbf{R}_c = \gamma_c^{(iso)} r_c. \quad (3.199)$$

Für die *back-stress*-Tensoren  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\xi}_p$  und  $\hat{\xi}_c$  gelten weiterhin die Beziehungen (3.145) und (3.146) sowie (3.149). Im Gegensatz zu einer gekoppelt isotropen und einer kinematischen Dissipationsungleichung (3.160) und (3.161) geht man nun von vier ungekoppelten Ungleichungen aus:

$$(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\xi}_p) \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_p - \mathbf{R} \dot{r} \geq 0, \quad (3.200)$$

$$(\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c) \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \mathbf{R}_c \dot{r}_c \geq 0, \quad (3.201)$$

$$\hat{\xi} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_d \geq 0, \quad (3.202)$$

$$\hat{\xi}_c \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_d \geq 0. \quad (3.203)$$

Separate Fließfunktionen einer mikro- und makroskopischen Plastizität lassen sich wiederum aus einer Verallgemeinerung der klassischen VON MISES Fließfunktion, siehe DE BORST [9], gewinnen,

$$f := \sqrt{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p)^D \cdot \mathbb{A} [\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p]^D} - k, \quad (3.204)$$

$$f_c := \sqrt{(\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c)^D \cdot \mathbb{A}_c [\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c]^D} - k_c. \quad (3.205)$$

Die Größen  $k$  und  $k_c$  stehen hierbei für makro- und mikroskopische Fließspannungen. Die Ableitung dieser Fließfunktionen jeweils nach den Spannungen und Koppelspannungen liefert

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \frac{1}{f+k} \mathbb{A} [\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}_p]^D, \quad (3.206)$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c} = \frac{1}{f_c+k_c} \mathbb{A}_c [\hat{\mathbf{T}}_c - \hat{\xi}_c]^D. \quad (3.207)$$

Für separate isotrope Verfestigungen verwendet man die Beziehungen

$$k = k_0 + R, \quad (3.208)$$

$$k_c = k_{c0} + R_c, \quad (3.209)$$

wobei  $k_0$  und  $k_{c0}$  positive Konstanten darstellen. Gemäß der Vorgehensweise von (3.168)–(3.177) erhält man die Evolutionsgleichungen für die isotropen Fließspannungen

$$\dot{k} = \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} \left( \gamma^{(iso)} - \beta^{(iso)} (k - k_0) \right), \quad (3.210)$$

$$\dot{k}_c = \frac{\dot{\zeta}_c}{\zeta_c} \left( \gamma_c^{(iso)} - \beta_c^{(iso)} (k_c - k_{c0}) \right) \quad (3.211)$$

mit positiven Konstanten  $\gamma^{(iso)}$  und  $\gamma_c^{(iso)}$  sowie  $\beta^{(iso)}$  und  $\beta_c^{(iso)}$ . Die Evolutionsgleichungen der kinematischen Verfestigung lauten in Analogie zu (3.179)–(3.184):

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_k = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{e}}}_p - \mathbb{M} [\hat{\xi}] = \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{P}}} - \mathbb{M} [\hat{\xi}], \quad (3.212)$$

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_k = \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \mathbb{M}_c [\hat{\xi}_c] = \frac{\dot{\zeta}_c}{\zeta_c} \frac{\partial f_c}{\partial \hat{\mathbf{T}}_c} - \mathbb{M}_c [\hat{\xi}_c]. \quad (3.213)$$

### 3.2.4 Das Materialmodell in der Momentankonfiguration bei kleinen elastischen Verzerrungen

Aus Experimenten ist bekannt, dass viele Materialien einen kleinen elastischen Deformationsbereich aufweisen, während im plastischen Bereich sehr große Deformationen ertragen werden können. Daraus ergibt sich der Ansatz, von kleinen elastischen mikropolaren Verzerrungen  $\hat{\mathbf{e}}_e$  auszugehen. Im Einzelnen geht man davon aus, dass

$$\|\mathbf{U}_e - \mathbf{1}\| \ll 1, \quad (3.214)$$

$$\|\bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1}\| \ll 1 \quad (3.215)$$

gilt. Über die Einführung der Größe

$$\epsilon_e := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}_R, t \geq 0} (\|\mathbf{U}_e - \mathbf{1}\|, \|\bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1}\|) \quad (3.216)$$

können die elastischen Variablen anhand der asymptotischen Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_e &= \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e), & \mathbf{V}_e &= \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e), \\ \bar{\mathbf{U}}_e &= \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e), & \bar{\mathbf{V}}_e &= \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e), \\ \mathbf{F}_e &= \mathbf{R}_e + \mathcal{O}(\epsilon_e), & \mathbf{R}_e &= \bar{\mathbf{R}}_e + \mathcal{O}(\epsilon_e), \end{aligned} \quad (3.217)$$

approximiert werden, wobei  $\mathcal{O}$  das LANDAU-Symbol (“groß O”) darstellt. Damit erhält man die Näherungsgleichungen

$$\epsilon_e = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\epsilon}_e \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}, \quad (3.218)$$

$$\mathbf{K}_e = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{K}}_e \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}. \quad (3.219)$$

Die Transformation der Spannungen lässt sich dann anhand der Approximationen

$$\hat{\mathbf{T}} \approx \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{R}}_e, \quad (3.220)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c \approx \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{S}_c \bar{\mathbf{R}}_e \quad (3.221)$$

durchführen, wobei durch

$$\mathbf{S} := \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \mathbf{T}, \quad (3.222)$$

$$\mathbf{S}_c := \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \mathbf{T}_c \quad (3.223)$$

der gewichtete CAUCHY’schen Spannungstensor und Koppelspannungstensor definiert sind. Für die MANDEL’schen Spannungen gilt mit den Annahmen (3.214) und (3.215) die Näherungsbeziehung  $\hat{\mathbf{P}} \approx \bar{\mathbf{R}}_e^T (\mathbf{S} + \mathbf{K}_e^T \mathbf{T}_c) \bar{\mathbf{R}}_e$ , so dass man die MANDEL’schen Spannungen bezüglich der Momentankonfiguration in Form der Definition

$$\mathbf{P} := \mathbf{S} + \mathbf{K}_e^T \mathbf{S}_c \quad (3.224)$$

eingführt. Die kinematischen Variablen lassen sich auf der Momentankonfiguration über die Gleichungen

$$\epsilon_k := \bar{\mathbf{R}}_k \hat{\epsilon}_k \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\epsilon}_e \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}, \quad (3.225)$$

$$\mathbf{K}_k := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{K}}_k \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{K}}_k \bar{\mathbf{R}}_e^{-1} \quad (3.226)$$

definieren. Für die objektiven Geschwindigkeiten sollen analoge Beziehungen gelten:

$$\overset{\Delta}{\epsilon}_p := \bar{\mathbf{R}}_k \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_p \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}, \quad (3.227)$$

$$\overset{\Delta}{\epsilon}_k := \bar{\mathbf{R}}_k \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_k \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\Delta}{\hat{\epsilon}}_e \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}, \quad (3.228)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{K}}_p := \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_p \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}, \quad (3.229)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{K}}_k := \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_k \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{K}}}_k \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}. \quad (3.230)$$

Entsprechend führt man die *back-stresses*

$$\xi := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\xi} \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\xi} \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}, \quad (3.231)$$

$$\xi_P := (\mathbf{1} - \epsilon_k^T) \xi - \mathbf{K}_k^T \xi_c, \quad (3.232)$$

$$\xi_c := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\xi}_c \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\xi}_c \bar{\mathbf{R}}_e^{-1} \quad (3.233)$$

ein. Für die MANDEL-artigen *back-stresses* gilt die Approximation

$$\xi_P = \bar{\mathbf{R}}_k \hat{\xi}_P \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\xi}_P \bar{\mathbf{R}}_e^{-1}. \quad (3.234)$$

Die Ableitungen der Fließfunktionen ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{f+k} \mathbb{A} [\mathbf{P} - \xi_P]^D, \quad (3.235)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}_c} = \frac{1}{f+k} \mathbb{A}_c [\mathbf{S}_c - \xi_c]^D \quad (3.236)$$

und

$$\dot{s} := \sqrt{\hat{\epsilon}_p^\Delta \cdot \hat{\epsilon}_p^\Delta + l^2 \hat{\mathbf{K}}_p^\Delta \cdot \hat{\mathbf{K}}_p^\Delta}, \quad (3.237)$$

$$\zeta := \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} + l^2 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}_c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}_c}}. \quad (3.238)$$

Das vollständige Materialmodell setzt sich bezüglich der Momentankonfiguration aus den folgenden Gleichungen der Elastizität, Plastizität und der Verfestigung zusammen:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} [\epsilon - \epsilon_p], \quad (3.239)$$

$$\mathbf{S}_c = \mathbb{D} [\mathbf{K} - \mathbf{K}_p], \quad (3.240)$$

$$f = \sqrt{(\mathbf{P} - \xi_P)^D \cdot \mathbb{A} [\mathbf{P} - \xi_P]^D + (\mathbf{S}_c - \xi_c)^D \cdot \mathbb{A}_c [\mathbf{S}_c - \xi_c]^D} - k, \quad (3.241)$$

$$\hat{\epsilon}_p^\Delta = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}}, \quad (3.242)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_p^\Delta = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}_c}, \quad (3.243)$$

$$\mathbf{R} = \gamma^{(iso)} \mathbf{r}, \quad (3.244)$$

$$k = k_0 + \mathbf{R}, \quad (3.245)$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{s}}{\zeta} \left( \gamma^{(iso)} - \beta^{(iso)} (k - k_0) \right), \quad (3.246)$$

$$\xi = \mathbb{H} [\epsilon_k], \quad (3.247)$$

$$\xi_c = \mathbb{H}_c [\mathbf{K}_k], \quad (3.248)$$

$$\hat{\epsilon}_k^\Delta = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} - \mathbb{M} [\xi], \quad (3.249)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_k^\Delta = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}_c} - \mathbb{M}_c [\xi_c]. \quad (3.250)$$

---

### 3.2.5 Das Materialmodell bei kleinen Deformationen

---

Das mikropolare Plastizitätsgesetz bei großen Deformationen, Gleichungen (3.239)–(3.250), kann mit einer Annahme, dass elastische wie plastische Deformationen klein bleiben, vereinfacht werden. Gerade im Hinblick auf numerischen Lösungen plastischer Probleme bringt eine solche Vereinfachung signifikante Geschwindigkeitsvorteile mit sich. Man beginnt bei den Darstellungen der Deformationsmaße anhand von

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1}, \quad (3.251)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{M} + \mathbf{1}, \quad (3.252)$$

wobei  $\mathbf{H}$  den Verschiebungsgradienten und  $\mathbf{M}$  den linearisierten Mikrorotationstensor bezeichnet. Es wird nun angenommen, dass die tensoriellen Beträge sowohl der Größen  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  als auch der zeitlichen Ableitungen klein sind, d.h.

$$\|\mathbf{H}\|, \|\dot{\mathbf{H}}\| \ll 1 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{M}\|, \|\dot{\mathbf{M}}\| \ll 1. \quad (3.253)$$

Bei kleinen Deformationen definiert man einen mikropolaren Verzerrungstensor  $\epsilon$  über die Gleichung

$$\epsilon := \mathbf{H}^T + \mathbf{M}, \quad (3.254)$$

Der Mikrorotationstensor ist in der linearen Theorie antisymmetrisch,  $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^T$ , so dass der Tensor  $\mathbf{M}$  auch durch einen axialen Vektor  $\mathbf{m}$  ausgedrückt werden kann:

$$\mathbf{m} = \text{axl}(\mathbf{M}). \quad (3.255)$$

Die Größe  $\mathbf{m}$  stellt einen axialen Vektor der Mikrorotation dar. Der mikropolare Krümmungstensor ist definiert als der Gradient des Mikrorotationsvektors,

$$\mathbf{K} := \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.256)$$

Auch bei kleinen Deformationen gilt die additive Zerlegung der Deformationsmaße in elastische und plastische Anteile,

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad (3.257)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_p, \quad (3.258)$$

sowie die Zerlegung in kinematische und dissipative Verzerrungs- und Krümmungstensoren:

$$\epsilon_p = \epsilon_k + \epsilon_d, \quad (3.259)$$

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_d. \quad (3.260)$$

Die Fließregeln enthalten die Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}^T} = \frac{1}{f+k} \mathbb{A} [\mathbf{T}^T - \boldsymbol{\xi}^T]^D, \quad (3.261)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}_c} = \frac{1}{(f+k)} \mathbb{A}_c [\mathbf{T}_c - \boldsymbol{\xi}_c]^D, \quad (3.262)$$

$$\dot{s} := \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + l^2 \dot{\mathbf{K}}_p \cdot \dot{\mathbf{K}}_p}, \quad (3.263)$$

$$\zeta := \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}^T} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}^T} + l^2 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}_c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}_c}}, \quad (3.264)$$

wobei die Materialtensoren bereits im Zusammenhang mit großen Deformationen definiert wurden. Das Materialmodell für kleine mikropolare Deformationen wird nun zusammengefasst,

$$\mathbf{T}^T = \mathbb{C} [\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_p], \quad (3.265)$$

$$\mathbf{T}_c = \mathbb{D} [\mathbf{K} - \mathbf{K}_p], \quad (3.266)$$

$$f = \sqrt{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot \mathbb{A} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D + (\mathbf{T}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D \cdot \mathbb{A}_c [\mathbf{T}_c - \boldsymbol{\xi}_c]^D} - k, \quad (3.267)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}^T}, \quad (3.268)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_p = \frac{\dot{s}}{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}_c}, \quad (3.269)$$

$$\mathbf{R} = \gamma^{(iso)} \mathbf{r}, \quad (3.270)$$

$$k = k_0 + \mathbf{R}, \quad (3.271)$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{s}}{\zeta} (\gamma^{(iso)} - \beta^{(iso)} (k - k_0)), \quad (3.272)$$

$$\boldsymbol{\xi}^T = \mathbb{H} [\boldsymbol{\epsilon}_k], \quad (3.273)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k = \frac{\dot{s}}{\zeta} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}^T} - \mathbb{M} [\boldsymbol{\xi}^T] \right), \quad (3.274)$$

$$\boldsymbol{\xi}_c = \mathbb{H}_c [\mathbf{K}_k], \quad (3.275)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_k = \frac{\dot{s}}{\zeta} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}_c} - \mathbb{M}_c [\boldsymbol{\xi}_c] \right). \quad (3.276)$$

Alle in diesem Abschnitt verwendeten Materialparameter wurden bereits in Zusammenhang mit großen Deformationen eingeführt.

### 3.3 Materialgesetze der Kontaktfläche

In Analogie zu materiellen Körpern wird die Zwischenschicht im Kontaktbereich als Kontaktmaterial bezeichnet. Dabei beziehen materielle Teilchen der Kontaktfläche ihre mechanischen, bzw. thermischen Eigenschaften aus der Stoffzusammensetzung und Oberflächenbeschaffenheit beider am Kontakt beteiligter Körper.



Ähnlich wie im Fall der Materialgleichung für mikropolare Plastizität nimmt man auch für die Zwischenschicht an, dass die Bedingungen

$$\check{p} \dot{g} - \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau - \mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{j} \eta_c \dot{\theta}_c - \frac{1}{j} \dot{\Psi}_c \geq 0, \quad (3.277)$$

$$-\theta_c (\mathbf{S}^s - \mathbf{S}^m) \cdot \mathbf{n}^s \geq 0, \quad (3.278)$$

hinreichend für die Erfüllung der Entropieungleichung (3.86) sind. Da jedoch isotherme Prozesse vorausgesetzt wurden, reicht es im Weiteren aus, nur die Gültigkeit der Ungleichung

$$\check{p} \dot{g} - \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau - \mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{j} \eta_c \dot{\theta}_c - \frac{1}{j} \dot{\Psi}_c \geq 0 \quad (3.279)$$

mit  $\theta_c = \text{konst}$  sicherzustellen.

Es wird davon ausgegangen, dass eine Durchdringung einen physikalisch unzulässigen Normalkontaktzustand darstellt und dass im Haftungsfall keine Relativverschiebungen und -rotationen bezüglich  $\gamma^s$  existieren. Damit wird der Ansatz verwendet, dass die freie Energie der Kontaktschicht verschwindet:

$$\Psi_c = 0. \quad (3.280)$$

Des Weiteren wird von den hinreichenden Bedingungen

$$\check{p} \dot{g} \geq 0, \quad (3.281)$$

$$-\mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_\tau \geq 0, \quad (3.282)$$

$$-\mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} \geq 0 \quad (3.283)$$

zur Erfüllung der Dissipationsungleichung (3.279) ausgegangen. Oft wird für tangentialen Kontakt das COULOMB'sche Reibungsgesetz und bezüglich des Normalkontaktes ein Elastizitätsgesetz angenommen. Insbesondere hat KLARBRING [45] ein Potenzgesetz als Elastizitätsgesetz angenommen und die thermodynamische Konsistenz für beide Gesetze nachgewiesen. An die Stelle eines Elastizitätsgesetzes für den Normalkontakt treten im Rahmen dieser Arbeit einschränkende Bedingungen für den Kontaktdruck und die Abstandsfunktion. Bei klassischem Reibungskontakt wird wie in [45] das COULOMB'sche Reibungsgesetz verwendet.

### 3.3.1 Normalkontaktbedingung

Das Modell für den Normalkontakt wird anhand der Fallunterscheidung

$$\text{Kein Kontakt :} \quad g > 0 \quad \Rightarrow \quad \check{p} = 0 \text{ und } \dot{g} \text{ beliebig,} \quad (3.284)$$

$$\text{Berührung :} \quad g = 0 \text{ und } \check{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{g} \geq 0, \quad (3.285)$$

$$\text{Kontakt :} \quad \check{p} < 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0 \text{ und } \dot{g} = 0. \quad (3.286)$$

eingeführt, wobei eine Durchdringung mit  $g < 0$  einen unzulässigen Kontaktzustand darstellt. **Ein Zustand, bei dem der Kontaktdruck negativ ist,  $\check{p} < 0$ , wird in (3.286) und im Folgenden als Kontakt bezeichnet.** Die drei Fälle sind äquivalent zu den Bedingungen:

$$\check{p} \leq 0 \quad \text{und} \quad g \geq 0 \quad \text{und} \quad \check{p} g = 0. \quad (3.287)$$

Diese Bedingungen, die in jedem der drei Fälle (3.284) bis (3.286) und damit auf der gesamten Zwischenschicht  $\gamma^s$  gelten (siehe z.B. LAURSEN [50] S.73, ABBAS [2]), werden häufig als KUHN-TUCKER-Bedingungen bezeichnet (Laursen [50] S.73). Auch eine Bezeichnung als HERTZ-SIGNORINI-MOREAU-Bedingungen ist gebräuchlich (WRIGGERS [85] S. 57).

Berührung impliziert in (3.285) die Bedingung  $\dot{g} \geq 0$ , da eine negative Geschwindigkeit sofort im nächsten Zeitpunkt eine Durchdringung, bzw. eine weitere Belastung negative Werte für  $g$  zur Folge hätte. Dies wäre jedoch ein unzulässiger Kontaktzustand. Bei Kontakt, (3.286), muss  $\dot{g} = 0$  gelten, da bei einer Reduzierung des Kontaktdruckes erst im nächsten Zeitpunkt die Bedingung  $\dot{g} > 0$  eintreten kann. In jedem der drei Fälle (3.284)–(3.286) gilt somit die Bedingung (siehe z.B. SCHERF [69] S. 48):

$$\check{p} \dot{g} = 0, \quad (3.288)$$

was thermodynamisch verträglich mit (3.281) ist.

### 3.3.2 Reibgesetz von COULOMB

Wenn zwei Körper aufeinander gleiten, dann wird angenommen, dass dieser Vorgang stets mit Reibung verbunden ist. Ein einfaches Gesetz für eine Beschreibung von Reibprozessen ist unter dem Namen COULOMB'sches Reibgesetz bekannt. Schon LEONARDO DAVINCI erkannte, dass die Reibungskraft von der Normalkontaktkraft abhängt. 1699 formulierte AMONTONS die Annahmen, dass die Beträge dieser Kräfte proportional zueinander sind und dass die Geometrie der Kontaktfläche keinen Einfluss auf die Reibkraft hat. 1785 fügte COULOMB die Aussage hinzu, dass die Reibkraft unabhängig von der Reibgeschwindigkeit ist (SCHERF, [69]).

Das COULOMB'sche Gesetz postuliert, dass das Verhältnis beider Kraftbeträge bei Grenzhaftung und ausgebildeter Reibung konstant ist. Es kann damit eine skalare Größe  $\eta$  eingeführt werden, die im Allgemeinen von dem Material und der mikroskopischen Oberflächenbeschaffenheit der Kontaktpartner abhängt. Demnach stellt die Konstante  $\eta$  einen Materialparameter der Kontaktfläche dar, der üblicherweise als Reibkoeffizient bezeichnet wird. Bei einer lokalen Betrachtungsweise werden die Komponenten der Normalkontakt- und Reibkraft mit dem Kontaktdruck  $\check{p}$  und dem tangential zur Kontaktfläche wirkenden Spannungsvektor  $\mathbf{t}_T$  identifiziert.

Durchdringung ist durch (3.287,2) ausgeschlossen. Bei Berührung und Kontakt gilt somit  $g = 0$  und damit folgt für diese Zustände aus (2.136):

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}_T. \quad (3.289)$$

Setzt man mit  $\check{p} < 0$  **Kontakt** voraus, dann lassen sich die Aussagen des COULOMB'schen Reibgesetzes wie folgt mit Hilfe eines skalaren  $\alpha_T$  zusammenfassen:

$$\text{Haftung :} \quad \|\mathbf{t}_T\| < \eta|\check{p}| \Rightarrow \quad \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (3.290)$$

$$\text{Grenzhaftung oder Reibung :} \quad \|\mathbf{t}_T\| = \eta|\check{p}| \Rightarrow \quad \exists \alpha_T \geq 0; \mathbf{v}_T = -\alpha_T \mathbf{t}_T \quad (3.291)$$

wobei in jedem Fall und insbesondere bei **keinem Kontakt**

$$\mathbf{t}_T g = 0 \quad (3.292)$$

gilt, siehe ABBAS [2]. Im Fall der **Grenzhaftung** gilt  $\alpha_T = 0$  und bei **Reibung**  $\alpha_T > 0$ . Die Größe  $\alpha_T$  wird dabei aus der Lösung der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt, siehe BELYTSCHKO, LIU und MORAN [7] S. 580. Im Haftungs- und Reibungsfall lässt sich die Verträglichkeit dieses Gesetzes mit der Dissipationsungleichung (3.282) sofort zeigen. Durch Einsetzen von (3.290) und (3.291) erhält man

$$\text{Haftung} \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_T = 0, \quad (3.293)$$

$$\text{Grenzhaftung oder Reibung} \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_T = \alpha_T \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{t}_T \geq 0. \quad (3.294)$$

Bei **keinem Kontakt** gilt aufgrund der Festlegung in inaktiven Bereichen von  $\mathbf{t}_T = \mathbf{0}$  trivialerweise  $-\mathbf{t}_T \cdot \mathbf{v}_T = 0$ .

### 3.3.3 Reibgesetz der Mikrorotation vom COULOMB Typ

Bei der Entwicklung eines Reibgesetzes der Mikrorotation nutzt man formell Analogien zur klassischen COULOMB'schen Reibung in der Darstellung aus dem vorherigen Abschnitt. Wie im klassischen COULOMB'schen Gesetz führt man einen Materialparameter  $\eta_c$  ein, der die Momentenspannungsvektoren im Übergang von Haft- zu Reibrotationen bestimmt. Der Parameter  $\eta_c$  wird als Reibrotationskoeffizienten bezeichnet. Er besitzt die Dimension einer Länge. Weiterhin wird angenommen, dass der Kontaktdruck  $\check{p}$  den Betrag der Momentenspannungsvektoren beeinflusst. In Verbindung mit einem konstitutiven Exponentialgesetz wurde eine solche Annahme bereits in ZHANG, WANG, WRIGGERS und SCHREFLER [87] verwendet. Darüber hinaus wird in [87] von einer allgemeinen Abhängigkeit der Momentenspannungsvektoren von dem Kontaktdruck, den tangentialen klassischen Spannungsvektoren und den relativen Verschiebungen und relativen Rotationsvektoren ausgegangen. Trivial ist eine Abhängigkeit vom Druck bei separierten Körpern, dann können nämlich mit  $\check{p} = 0$  keine vom Nullvektor verschiedene Momentenspannungsvektoren existieren, d.h. es folgt sofort  $\mathbf{t}_c^s = \mathbf{0}$ .

In Analogie zu dem klassischen COULOMB'schen Gesetz (3.290) und (3.291) gilt mit einem skalarem  $\alpha_R$  bezüglich der Momentankonfiguration  $\gamma^s$  ein einfaches Reibungsgesetz der Form

$$\text{Haftrotation :} \quad \|\mathbf{t}_c^s\| < \eta_c |\check{p}| \Rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (3.295)$$

$$\text{Grenzhaftrotation oder Reibrotation :} \quad \|\mathbf{t}_c^s\| = \eta_c |\check{p}| \Rightarrow \quad \exists \alpha_R \geq 0; \Delta \boldsymbol{\omega} = -\alpha_R \mathbf{t}_c^s, \quad (3.296)$$

wobei für **Grenzhaftrotation**  $\alpha_R = 0$  und für **Reibrotation**  $\alpha_R > 0$  gilt. **Kontakt**, d.h.  $\check{p} < 0$ , wurde jeweils vorausgesetzt. In jedem Fall und insbesondere bei **keinem Kontakt** ist die Gleichung

$$\mathbf{t}_c^s \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (3.297)$$

erfüllt.

Durch Einsetzen von (3.295) und (3.296) in die Dissipationsungleichung (3.283) kann die thermodynamische Verträglichkeit gezeigt werden:

$$\text{Rotationshaftung} \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (3.298)$$

$$\text{Grenzhaftrotation oder Rotationsreibung} \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} = \alpha_R \mathbf{t}_c^s \cdot \mathbf{t}_c^s \geq 0. \quad (3.299)$$

Im inaktiven Bereich der Kontaktfläche, in dem **kein Kontakt** herrscht, gilt  $\mathbf{t}_c^s = \mathbf{0}$  und damit  $-\mathbf{t}_c^s \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} = 0$ .



---

## 4 FEM

---

Für das in Kapitel 3 entwickelte Materialmodell ist eine analytische Lösung bei beliebigen Bauteilgeometrien und Belastungen nicht mehr mit vertretbarem Aufwand zu bestimmen. Drei Gründe seien genannt, die in hohem Maße eine Lösungsfindung erschweren. Zum Einen existiert aufgrund der Plastizität eine Abhängigkeit von der gesamten Deformationsgeschichte. Zum Anderen führt die Formulierung mit großen Deformationen auf eine hohe Komplexität der linearisierten Gleichgewichtsbedingungen. Drittens bringen Kontaktbedingungen zusätzliche Nichtlinearitäten in das Gesamtmodell ein. In dieser Arbeit werden deshalb die Modellgleichungen numerisch und auf inkrementellem Wege gelöst. Das Verfahren, dass hierfür eingesetzt wird, ist die Finite-Elemente-Methode, kurz FEM.

Auf die Theorie, die diesem Verfahren zugrunde liegt, soll hier nicht eingegangen werden. Es wird auf die grundlegende Literatur, z.B. BATHE [4], HUGHES [39], KNABNER und ANGERMANN [47], SCHÄFER [68], ZIENKIEWICZ [89], ZIENKIEWICZ und TAYLOR [90] verwiesen. Die Herleitung der schwachen Form des quasistatischen Randwertproblems und der konsistenten Linearisierung im Fall von mikropolarem Materialverhalten geht auf Steinmann [74] zurück.

Auf Methoden zur numerischen Behandlung nicht-linearer Materialmodelle wird ausführlich in WRIGGERS [86] eingegangen. Die Entwicklung einer Finite-Elemente Formulierung im Rahmen mikropolarer Modelle großer Deformationen wird im Detail in GRAMMENODIS und TSAKMAKIS [29] diskutiert. Insbesondere ist eine Untersuchung numerischer Aspekte Finiter Elemente für mikropolare Hyperelastizität in BAUER, DETTMER, PERIC und SCHÄFER [5] und BAUER, SCHÄFER, GRAMMENODIS und TSAKMAKIS [6] dargestellt. Bei der Entwicklung der mikropolaren Kontaktelemente in Zusammenhang mit einer Hybridmethode diente die Publikation von ABBAS [2] als überaus hilfreiches Referenzwerk. Theoretische Aspekte der Hybridmethode bei Kontaktproblemen werden in KHENOUS, POMMIER und RENARD [44] diskutiert.

Bei der Implementierung in das FE-Programm *feap* wurden die Handbücher von TAYLOR [78], [77] verwendet. Für einen Einbau der mikropolaren Körper- und Kontakttroutinen in das FE-Programm *Code\_Aster* waren zahlreiche Publikationen im Rahmen der umfangreichen *Code\_Aster*-Dokumentation sehr hilfreich, die Online unter [www.codeaster.org](http://www.codeaster.org) verfügbar ist. Besonders hervorgehoben werden die Arbeiten von ABBAS [2], [3] und [1].

Bei nicht-polaren Medien wird das Fundament der schwachen Form durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen repräsentiert, siehe z.B. HUGHES [39], SCHWARZ [71] und REDDY [66]. In diesem Abschnitt wird das Prinzip der virtuellen Arbeit auf den Fall mikropolarer Körper generalisiert. Als weiterführende Literatur seien die Arbeiten von STEINMANN [74], ERINGEN [23] und ELSÄSSER [21] genannt.

---

### 4.1 Starke Formulierung eines mikropolaren quasistatischen Randwertproblems

---

Für eine vollständige Formulierung eines quasistatischen Problems unter Berücksichtigung einer Kontaktzwischenschicht ist die Vorgabe von Randbedingungen auf den freien Randbereichen  $\partial \mathcal{R}_t \setminus \gamma$  notwendig, wobei die Beziehungen

$$\partial \mathcal{R}_t^u \cup \partial \mathcal{R}_t^t \cup \gamma = \partial \mathcal{R}_t, \quad (4.1)$$

$$\partial \mathcal{R}_t^m \cup \partial \mathcal{R}_t^c \cup \gamma = \partial \mathcal{R}_t \quad (4.2)$$

und

$$\partial \mathcal{R}_t^u \cap \partial \mathcal{R}_t^t = \partial \mathcal{R}_t^u \cap \gamma = \partial \mathcal{R}_t^t \cap \gamma = \emptyset, \quad (4.3)$$

$$\partial \mathcal{R}_t^m \cap \partial \mathcal{R}_t^{t_c} = \partial \mathcal{R}_t^m \cap \gamma = \partial \mathcal{R}_t^{t_c} \cap \gamma = \emptyset \quad (4.4)$$

gelten müssen. DIRICHLET'schen Randbedingung auf den Bereichen  $\partial \mathcal{R}_t^u$  und  $\partial \mathcal{R}_t^m$  für die Verschiebungen und mikropolaren Rotationen werden durch

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^u, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^m, \quad (4.6)$$

vorgegeben. Der Vektor  $\mathbf{m}$  stellt einen axialen Vektor dar, der mit der Mikrorotation über

$$\bar{\mathbf{R}} = \exp(\text{spn } \mathbf{m}) \quad (4.7)$$

zusammenhängt, für die in Form der sogenannten EULER-RODRIGUES-Formel auch eine geschlossene Lösung existiert, siehe (1.18). NEUMANN'sche Randbedingungen auf den Randbereichen  $\partial \mathcal{R}_t^t$  und  $\partial \mathcal{R}_t^{t_c}$  werden durch

$$\mathbf{T}[\mathbf{n}] = \mathbf{t}^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^t, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{T}_c[\mathbf{n}] = \mathbf{t}_c^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^{t_c}. \quad (4.9)$$

dargestellt. Der Vektor  $\mathbf{n}$  bezeichnet die nach außen gerichtete Normale an ein Flächenelement der Körperränder. Bei quasistatischen Prozessen können in den Gleichgewichtsbedingungen Beschleunigungsterme vernachlässigt werden, so dass bezüglich  $\mathcal{R}_t$  die Gleichungen

$$\text{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

$$\text{div} \mathbf{T}_c + \mathbf{t}_A + \mathbf{b}_c = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

erfüllt sein müssen. Diese Gleichungen bilden mit den zuvor eingeführten Randbedingungen die starke Form des zu lösenden Randwertproblems.

---

## 4.2 Schwache Form, Gesamtfunktional

---

Aus der mikropolaren Impuls- (4.10) und Drehimpulsbilanz (4.11) werden lokale schwache Formen durch Skalarmultiplikation mit vektorwertigen Funktionen  $\delta \mathbf{u}$  (virtuelle Verschiebung) und  $\delta \mathbf{m}$  (virtuelle Rotation) gebildet:

$$\text{div} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} = 0, \quad (4.12)$$

$$\text{div} \mathbf{T}_c \cdot \delta \mathbf{m} + \mathbf{t}_A \cdot \delta \mathbf{m} + \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{m} = 0. \quad (4.13)$$

Für das weitere Vorgehen definiert man die Funktionale

$$-\mathcal{F} := \int_{\mathcal{R}_t} \text{div} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv, \quad (4.14)$$

$$-\mathcal{F}_c := \int_{\mathcal{R}_t} \text{div} \mathbf{T}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{t}_A \cdot \delta \mathbf{m} \, dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, dv. \quad (4.15)$$

Der virtuelle Rotationsvektor besitzt einen zugeordneten antisymmetrischen Tensor  $\delta \mathbf{M}$  (siehe z.B. GRAMMENOUDIS und TSAKMAKIS [29], GRAMMENOUDIS [27])

$$\delta \mathbf{M} = \text{spn}(\delta \mathbf{m}). \quad (4.16)$$

Das innere Produkt  $\mathbf{t}_A \cdot \delta \mathbf{m}$  kann damit auch in tensorieller Form geschrieben werden:

$$\mathbf{t}_A \cdot \delta \mathbf{m} = \mathbf{T}_A \cdot \delta \mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{M}. \quad (4.17)$$

Mit dem GAUSS'schen Integralsatz und einer partiellen Integration können die Funktionale (4.14) und (4.15) durch Beiträge über Körpervolumen und Randflächen ausgedrückt werden. Ohne auf Details einzugehen, erwähnen wir, dass die in Kapitel 3 vorgestellten Materialgleichungen erlauben,  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{T}_c$  als Funktionale von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{m}$  darzustellen. Somit hat man insgesamt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}} \cup \gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da, \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}} \mathbf{t}^0 \cdot \delta \mathbf{u} \, da}_{\mathcal{F}_c} - \int_{\gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c &= \mathcal{F}_c(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \delta \mathbf{m} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{M} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c} \cup \gamma} \mathbf{t}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, da, \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \delta \mathbf{m} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{M} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c}} \mathbf{t}_c^0 \cdot \delta \mathbf{m} \, da}_{\mathcal{F}_c} \\ &\quad - \int_{\gamma} \mathbf{t}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, da, \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei bezüglich der Spannungsränder von (4.8) und (4.9) Gebrauch gemacht wurde. Insgesamt müssen die Bedingungen

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) = 0, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{F}_c(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) = 0 \quad (4.21)$$

immer erfüllt sein.

---

### 4.3 Numerik der Körpervolumen

---

---

### 4.3.1 Funktionale über das Körpervolumen

---

Für die Funktionale der inneren Arbeiten ohne Kontaktzwischen-schicht in Gleichungen (4.18) und (4.19) schreibt man

$$\overline{\mathcal{F}} := \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^t} \mathbf{t}^0 \cdot \delta \mathbf{u} \, da, \quad (4.22)$$

$$\overline{\mathcal{F}}_c := \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \delta \mathbf{m} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{M} \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^{t_c}} \mathbf{t}_c^0 \cdot \delta \mathbf{m} \, da. \quad (4.23)$$

In dem Fall, dass kein Kontaktproblem vorliegt, verschwinden die Kontaktränder und es gilt

$$\partial \mathcal{R}_t^t \cup \gamma = \partial \mathcal{R}_t^t, \quad (4.24)$$

$$\partial \mathcal{R}_t^{t_c} \cup \gamma = \partial \mathcal{R}_t^{t_c}. \quad (4.25)$$

Die Funktionale  $\overline{\mathcal{F}}$  und  $\overline{\mathcal{F}}_c$  sind damit gleich dem Gesamtfunktional, so dass

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} = 0, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{F}_c = \overline{\mathcal{F}}_c = 0. \quad (4.27)$$

Es wird für den Rest des Abschnittes 4.3 über die Numerik der Körpervolumen die Annahmen (4.350) und (4.25) beibehalten.

---

### 4.3.2 Updated-Lagrange-Methode

---

Aufgrund geometrischer und materieller Nichtlinearitäten muss die Lösungsfindung für die schwachen Formen inkrementell durchgeführt werden. Auch bei quasistatischen Randwertproblemen sind die Inkremente durch eine Zeitdifferenz  $\Delta t$  gegeben. Ausgehend von den bekannten Lösungen des letzten Zeitschrittes  $t$  wird eine Lösung für die entsprechenden schwachen Formen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  gesucht. Innerhalb des gesamten Zeitintervalls erhält man an jedem diskreten Zeitpunkt  $0 = t^{(0)} < t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(p)}$  mit  $p = 0, 1, 2, \dots, n$  eine Lösung mit den Gleichgewichtslagen  $\mathcal{R}_{t^{(p)}}$ . Die Iterationsvorschrift ist durch

$$t^{(p+1)} = t^{(p)} + \Delta t \quad (4.28)$$

gegeben.  $t^{(n)}$  bezeichnet den Endzeitpunkt. Für die Lösung eines neuen Zeitschrittes mit  $\mathcal{R}_{t^{(p+1)}}$  wird die letzte Gleichgewichtslage  $\mathcal{R}_{t^{(p)}}$  als Referenzkonfiguration (*updated-Lagrange*) betrachtet. Man wird im Folgenden hierfür die verkürzten Schreibweisen  $\mathcal{R}_t$  und  $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$  gebrauchen. Damit lässt sich der Deformationsgradient und die Mikrorotation gemäß

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} = (\Delta_{\Delta t} \mathbf{F}) \mathbf{F}_t, \quad (4.29)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{t+\Delta t} = (\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{R}}_t, \quad (4.30)$$



zerlegen. Die zeitlichen Inkremente der Deformationen werden mit  $\Delta_{\Delta t} \mathbf{F}$  und  $\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}$  bezeichnet. Die Größen  $\mathbf{F}_t$  und  $\bar{\mathbf{R}}_t$  stellen festgehaltene Deformationen des letzten Zeitschrittes dar.  $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$  und  $\bar{\mathbf{R}}_{t+\Delta t}$  beziehen sich auf den aktuellen Zeitschritt. Mit

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{X}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{X} \quad (4.32)$$

führt man ein Verschiebungsincrement innerhalb eines Zeitschrittes ein:

$$\Delta_{\Delta t} \mathbf{u} := \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t. \quad (4.33)$$

Unter Verwendung von (1.17) erhält das Rotationsinkrement die Darstellung

$$\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}} := \exp(\text{spn}(\Delta_{\Delta t} \mathbf{m})), \quad (4.34)$$

wobei  $\Delta_{\Delta t} \mathbf{m}$  einen axialen Vektor darstellt. Ersetzt man in (4.30) auch die Rotationen des aktuellen Zeitschrittes gemäß (1.17), dann lässt sich mit Einführung des axialen Vektors  $\mathbf{m}_{t+\Delta t}$  auch

$$\exp(\text{spn}(\mathbf{m}_{t+\Delta t})) = \exp(\text{spn}(\Delta_{\Delta t} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}_t \quad (4.35)$$

schreiben. Damit lassen sich die Funktionale (4.22) und (4.23) zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  durch

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{F}}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}, \exp(\text{spn}(\mathbf{m}_{t+\Delta t})), \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \bar{\mathcal{F}}(\mathbf{u}_t + \Delta_{\Delta t} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\Delta_{\Delta t} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}_t, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

und

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{F}}_c(\mathbf{u}_{t+\Delta t}, \exp(\text{spn}(\mathbf{m}_{t+\Delta t})), \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \bar{\mathcal{F}}_c(\mathbf{u}_t + \Delta_{\Delta t} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\Delta_{\Delta t} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}_t, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

darstellen.

---

### 4.3.3 NEWTON-Verfahren, Konsistente Linearisierung

---

Um die Bedingungen (4.36) und (4.37) zu erfüllen, müssen die Gleichungen (4.12) und (4.13) für den aktuellen Zeitschritt  $t + \Delta t$  gelöst werden. Insgesamt führt dies auf ein nichtlineares Gleichungssystem, das mit dem NEWTON-Verfahren iterativ gelöst wird. Als Iterationsindex wird  $(i)$  verwendet. Zunächst nehmen die aktuellen Konfigurationen in der  $(i)$ -ten NEWTON-Iteration  $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$  eine Nichtgleichgewichtslage ein. Die Bedingungen (4.36) und (4.37) sind für eine solche Zwischenlösung nicht erfüllt. Ausgehend von der letzten NEWTON-Iteration wird eine neue Zwischenlösung errechnet, die auf eine neue Konfiguration  $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$  führt. Bei konvergentem Verlauf liefert das NEWTON-Verfahrens in jeder neuen Iteration  $(i + 1)$  eine verbesserte Lösung im Sinne der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen. Für die in diesem Abschnitt

verwendete Notation wird vereinbart, dass mit  $(i)$  bzw.  $(i + 1)$  indizierte Größen immer dem aktuellen Zeitschritt angehören, so dass insbesondere

$$\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)} \equiv \mathcal{R}^{(i)}, \quad (4.38)$$

$$\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i+1)} \equiv \mathcal{R}^{(i+1)} \quad (4.39)$$

gilt. Zwischen den NEWTON-Iterationen  $(i)$  und  $(i + 1)$  bestehen bei großen Deformationen die Vorschriften

$$\mathbf{F}^{(i+1)} = (\Delta^{(i)} \mathbf{F}) \mathbf{F}^{(i)}, \quad (4.40)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(i+1)} = (\Delta^{(i)} \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}. \quad (4.41)$$

$\Delta \mathbf{F}$  und  $\Delta \bar{\mathbf{R}}$  sind Inkremente der Deformation zwischen zwei NEWTON-Iterationen  $(i)$  und  $(i + 1)$ . Außerdem werden die Darstellungen

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \quad (4.42)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(i+1)} = \exp(\text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \quad (4.43)$$

verwendet, wobei die Größen  $\Delta^{(i)} \mathbf{u}$  und  $\Delta \mathbf{m}$  jeweils inkrementelle mikropolare Verschiebungs- und Rotationsvektoren bezüglich der  $(i)$ -ten NEWTON-Iteration bezeichnen.

Die linearisierte Form der Funktionale (4.36) und (4.37) erhält man aus einer TAYLOR'schen Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{u}^{(i+1)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i+1)}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) &= \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \Big|_{\lambda=\mu=1} \\ &= \overline{\mathcal{F}} + \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_c(\mathbf{u}^{(i+1)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i+1)}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) &= \overline{\mathcal{F}}_c(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \Big|_{\lambda=\mu=1} \\ &= \overline{\mathcal{F}}_c + \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Für die in diesen Gleichungen eingeführten skalaren Faktoren gilt  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\mu \in [0, 1]$ . Es gelten somit die Vorschriften

$$\frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\lambda} + \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\mu} = -\overline{\mathcal{F}}^{(i)}, \quad (4.46)$$

$$\frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\lambda} + \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\mu} = -\overline{\mathcal{F}}_c^{(i)}. \quad (4.47)$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stellen die Residuen dar. Die Integrationsgrenzen sind im Allgemeinen von den Skalaren  $\lambda$  und  $\mu$  abhängig. Bei der Transformation der Integrationsgrenzen ist es hilfreich, gewichtete Spannungstensoren zu verwenden:

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{T}, \quad \mathbf{S}_c = \mathbf{J} \mathbf{T}_c. \quad (4.48)$$

Es wird angenommen, dass die äußeren Lasten in den jeweils letzten beiden Integraltermen in (4.22) und (4.23) unabhängig von Verschiebungen und Rotationen sind. Bei einer Ableitung der Funktionale werden diese Terme deshalb nicht weiter dargestellt. Die Funktionale, die bezüglich der  $(i)$ -ten NEWTON-Iteration linearisiert werden, lauten somit

$$\overline{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{R}^{(i+1)}} \mathbf{T} \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dv^{(i+1)}, \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_c = \int_{\mathcal{R}^{(i+1)}} & \left\{ \mathbf{T}_c \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \text{grad} \delta \mathbf{m} \right. \\ & \left. - \mathbf{T} \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{M} \right\} dv^{(i+1)}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Mit Hilfe einer *pull-back*-Transformation werden diese Gleichungen auf die Momentankonfiguration gebracht. Da zwischen  $\mathcal{R}^{(i)}$  und  $\mathcal{R}_t$  aber keine direkte Abbildung existiert, wird zunächst auf die Referenzkonfiguration zurücktransformiert,

$$\overline{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \mathbf{S} \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \left( \text{Grad} \delta \mathbf{u} (\mathbf{F}^{(i)})^{-1} \right) dV_t^{(i)}, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_c = \int_{\mathcal{R}^{(i)}} & \left\{ \mathbf{S}_c \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \text{grad} \delta \mathbf{m} \right. \\ & \left. - \mathbf{S} \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{M} \right\} dV_t^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

wobei  $dV_t^{(i)} = dv^{(i+1)} / \det(\mathbf{F}^{(i)})$ , d.h. das Volumenelement  $dV_t$  auf der Referenzkonfiguration beschreibt ein Volumenelement in der Konfiguration  $\mathcal{R}^{(i)}$ . Zwischen dieser Konfiguration und der Referenzkonfiguration bildet der Deformationsgradient  $\mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})$  ab. Die Spannungen lassen sich darstellen durch

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S} \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right), \\ &= \mathbf{S} \left( \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \frac{\partial \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

sowie die Koppelspannungen anhand von

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c &= \mathbf{S}_c \left( \mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right), \\ &= \mathbf{S}_c \left( \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \frac{\partial \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Unter Verwendung von der Definition

$$\boldsymbol{\psi} := \left( \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \frac{\partial \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (4.55)$$

erhält man die Darstellung der Linearisierung des Funktionals der inneren Kräfte

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left[ \frac{d\mathbf{S}(\mathcal{V})}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \mathbf{S}^{(i)} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \left[ \frac{d\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} \right) dV^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} = \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left[ \frac{d\mathbf{S}(\mathcal{V})}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)}. \quad (4.57)$$

Die Linearisierung der Funktionale der inneren Koppelspannungen führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left[ \frac{d\mathbf{S}_c(\mathcal{V})}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \mathbf{S}_c^{(i)} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{X}} \left[ \frac{d\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} \right) dV^{(i)} \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left[ \frac{d\mathbf{S}(\mathcal{V})}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{M} dV^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} = \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left[ \frac{d\mathbf{S}_c(\mathcal{V})}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV_t - \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left[ \frac{d\mathbf{S}(\mathcal{V})}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{M} dV^{(i)}. \quad (4.59)$$

Die linearisierten Deformationsmaße lassen sich in Form der Gleichungen

$$\left[ \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)}, \quad (4.60)$$

$$\left[ \frac{d\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = -(\mathbf{F}^{-1})^{(i)} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}, \quad (4.61)$$

$$\left[ \frac{d}{d\mu} \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right]_{\mu=0} = \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\mu} \left( \frac{\partial \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right]_{\mu=0} &= \left( \frac{\partial \text{spn}_{ij}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial X_l} \bar{\mathbf{R}}_{jk}^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + \text{spn}_{ij}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_{jk}^{(i)}}{\partial X_l} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (4.63)$$

zusammenfassen. Mit Hilfe der Gleichungen (4.60) und (4.62) lassen sich weiterhin die Linearisierungen der Variationen in Form der Gleichungen

$$\left[ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]_{\lambda=\mu=0} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \left[ \frac{d\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = -\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}, \quad (4.64)$$

$$\left[ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right]_{\lambda=\mu=0} = \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{X}} \left[ \frac{d\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = -\frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}, \quad (4.65)$$

angeben. Das linearisierte Funktional der schwachen Formulierung der Impulsbilanz ergibt sich schließlich zu

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\bar{\mathcal{F}}}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \mathbf{F}^{(i)}} \left( \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \mathbf{S}^{(i)} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right) dV^{(i)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

und

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\bar{\mathcal{F}}}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left( \partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}} \left( \frac{\partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}_i^{(i)}} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \otimes \mathbf{e}_i \mathbf{F}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}} \left( \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Bezüglich der schwachen Form der Drehimpulsbilanz liefert die Linearisierung:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\bar{\mathcal{F}}_c}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}_c^{(i)}}{\partial \mathbf{F}^{(i)}} \left( \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \mathbf{S}_c^{(i)} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{X}} \left( (\mathbf{F}^{-1})^{(i)} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right) \right) dV^{(i)} \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \mathbf{F}^{(i)}} \left( \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{M} dV^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

und

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{d\bar{\mathcal{F}}_c}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}_c^{(i)}}{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left( \partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\
&+ \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}_c^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}} \left( \frac{\partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}_i^{(i)}} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \otimes \mathbf{e}_i \mathbf{F}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\
&+ \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}_c^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}} \left( \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\
&- \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left( \partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\
&- \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}} \left( \frac{\partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}_i^{(i)}} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \otimes \mathbf{e}_i \mathbf{F}^{(i)} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)} \\
&- \int_{\mathcal{R}^{(i)}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}} \left( \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} dV^{(i)}. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

#### 4.3.4 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Zur Integration der Materialgleichungen wird ein so genanntes Operator-Split-Verfahren nach SIMO und HUGHES [72], [73] verwendet. Bei der Lösung der Materialgleichungen wird hier von einem zweifachen Split ausgegangen. Der erste Operator wird dabei als elastischer Prädiktor bezeichnet. Eine Lösung dieses Operators wird ausschließlich unter Berücksichtigung elastischer Anteile der Materialgleichungen erhalten. Im zweiten Operator, dem plastischen Korrektor, werden dann die inelastisch/plastischen Materialgleichungen gelöst.

Bei der iterativen Lösung steht zu Beginn eines Zeitschrittes nicht *a priori* fest, an welchen Punkten im Material plastisches Verhalten vorliegt. Vorteil der Operator-Split-Methode ist es, dass mit der Prädiktorlösung die Fließbedingungen an jedem Integrationspunkt überprüft werden können. Sind dabei Fließbedingungen verletzt, dann war die Prädiktor-Annahme reiner Elastizität falsch. Die Lösungswerte des elastischen Schrittes müssen somit korrigiert werden. Dafür werden im Korrektor die plastischen Materialgleichungen integriert und die Evolution der inneren Variablen ermittelt.

Da die plastischen Evolutionsgleichungen im Allgemeinen Differentialgleichungen darstellen, muss die lokale Korrektur ebenfalls iterativ bestimmt werden. Hierfür wird ein implizites Zeitschrittverfahren verwendet, dass auch unter der Bezeichnung EULER-Rückwärts-Verfahren bekannt ist. Es entsteht dabei ein nicht-lineares Gleichungssystem, dass lokal mit einem NEWTON-Verfahren gelöst wird.

Ein grundlegendes Lehrbuch zur Lösung plastischer Problemstellungen mit numerischen Methoden ist SIMO und HUGHES [72]. Speziell für die Lösung plastischer Problemstellungen unter großen Deformationen siehe TSAKMAKIS und WILLUWEIT [84]. Darüber hinaus wird das Prediktor-Korrektor-Verfahren in WRIGGERS [86] anhand von klassischer Plastizität beschrieben.

---

## Operator ( $I$ ), elastischer Prediktor

---

Die Annahme, dass im aktuellen Zeitschritt  $t + \Delta t$  rein elastisches Verhalten vorliegt, ist gleich bedeutend mit einem Verschwinden objektiver plastischer Änderungsraten. In Operator ( $I$ ) werden nur die Anteile der Differentialgleichungen gelöst, die unabhängig von  $\dot{s}$  sind. Man erhält mit (2.95) und (2.97) die im ersten Operator zu lösenden Gleichungen:

$$\dot{\epsilon}_p = -\epsilon_p \mathbf{L} + \Omega \epsilon_p, \quad (4.70)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_p = -\mathbf{K}_p \mathbf{L} + \Omega \mathbf{K}_p, \quad (4.71)$$

$$\overset{\Delta}{\epsilon}_k = \mathbf{0}, \quad (4.72)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{K}}_k = \mathbf{0}, \quad (4.73)$$

$$\dot{k} = 0. \quad (4.74)$$

Größen, die aus diesen Annahmen folgen beziehen sich auf den Zeitpunkt  $t + \Delta t$  und werden im Folgenden mit einem hoch vorangestellten ( $I$ ) als Prediktor- oder *trial*-Größen bezeichnet (siehe z.B. WRIGGERS [85] S.217). Mit Hilfe von (4.29) und (4.30) lassen sich die plastischen Variablen anhand von

$$^{(I)}\epsilon_p := (\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}) (\epsilon_p)_t (\Delta_{\Delta t} \mathbf{F})^{-1}, \quad (4.75)$$

$$^{(I)}\mathbf{K}_p := (\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}) (\mathbf{K}_p)_t (\Delta_{\Delta t} \mathbf{F})^{-1}, \quad (4.76)$$

$$^{(I)}\epsilon_k := (\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}) (\epsilon_k)_t (\Delta_{\Delta t} \mathbf{F})^{-1}, \quad (4.77)$$

$$^{(I)}\mathbf{K}_k := (\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}) (\mathbf{K}_k)_t (\Delta_{\Delta t} \mathbf{F})^{-1}, \quad (4.78)$$

bestimmen, wobei für die plastische Bogenlänge

$$^{(I)}s := s_t \quad (4.79)$$

gilt. Gleichung (4.75)–(4.78) stellen *push-forward*-Transformationen der bekannten Größen des letzten Zeitschrittes  $t$  in die vorläufigen Prediktor-Größen des aktuellen Zeitschrittes  $t + \Delta t$  dar. Die ( $I$ )-Spannungen lassen sich damit anhand der Gleichungen

$$^{(I)}\mathbf{S} := \mathbb{C} \left[ ^{(I)}\epsilon - ^{(I)}\epsilon_p \right], \quad (4.80)$$

$$^{(I)}\mathbf{S}_c := \mathbb{D} \left[ ^{(I)}\mathbf{K} - ^{(I)}\mathbf{K}_p \right], \quad (4.81)$$

$$^{(I)}\mathbf{P} := ^{(I)}\mathbf{S} + \left( ^{(I)}\mathbf{K} - ^{(I)}\mathbf{K}_p \right)^T ^{(I)}\mathbf{S}_c \quad (4.82)$$

$$^{(I)}\xi := \mathbb{H} \left[ ^{(I)}\epsilon_k \right], \quad (4.83)$$

$$^{(I)}\xi_p := \left( \mathbf{1} - ^{(I)}\epsilon_k^T \right) ^{(I)}\xi - ^{(I)}\mathbf{K}_k^T ^{(I)}\xi_c, \quad (4.84)$$

$$^{(I)}\xi_c := \mathbb{H}_c \left[ ^{(I)}\mathbf{K}_k \right] \quad (4.85)$$

unter Berücksichtigung von (2.23) und (2.25)

$$^{(I)}\epsilon = \mathbf{1} - ^{(I)}\bar{\mathbf{R}} ^{(I)}\bar{\mathbf{F}}^{-1} \quad (4.86)$$

$$^{(I)}\mathbf{K} = \text{axl} \left( \left( \frac{\partial ^{(I)}\bar{\mathbf{R}}}{\partial X_i} \otimes \mathbf{E}_i ^{(I)}\bar{\mathbf{F}}^{-1} \right) \diamond ^{(I)}\bar{\mathbf{R}}^T \right) \quad (4.87)$$

bestimmen. Mit den vorläufigen Größen aus den Gleichungen (4.75)–(4.85) sind alle Größen bekannt, um anhand des Fließkriteriums

$$^{(I)}f := \sqrt{\left(^{(I)}\mathbf{P} - ^{(I)}\boldsymbol{\xi}_p\right)^D \cdot \mathbb{A} \left[^{(I)}\mathbf{P} - ^{(I)}\boldsymbol{\xi}_p\right]^D + \left(^{(I)}\mathbf{S}_c - ^{(I)}\boldsymbol{\xi}_c\right)^D \cdot \mathbb{A}_c \left[^{(I)}\mathbf{S}_c - ^{(I)}\boldsymbol{\xi}_c\right]^D} - k^{(I)} \quad (4.88)$$

die Annahme des Prediktorschrittes zu überprüfen. Wenn unter Berücksichtigung einer kleinen numerischen Toleranz die Bedingung  $f^{(I)} \leq 0$  gilt, dann war die vorläufige Annahme korrekt. Die vorläufige Lösung stellt dann die endgültige Lösung des aktuellen Zeitschrittes dar. Ist das Kriterium verletzt, so dass man bei der Überprüfung der Fließfunktion  $f^{(I)} > 0$  erhält, dann müssen die plastischen Variablen und Spannungen unter Einhaltung der Evolutionsgleichungen korrigiert werden.

---

### Operator (II), plastischer Korrektur

---

Für den Fall von  $^{(I)}f$  müssen die Evolutionsgleichungen der Plastizität und Verfestigung gelöst werden. Das vorliegende Anfangswertproblem wird mit Hilfe eines impliziten EULER-Verfahrens numerisch integriert. Als Startwerte werden die  $(I)$ -Lösungen des Prediktors verwendet. Die Lösung liegt in Form der Gleichungen

$$\mathbf{0} = ^{(II)}\boldsymbol{\epsilon}_p - ^{(I)}\boldsymbol{\epsilon}_p - \Delta t \stackrel{\Delta}{\boldsymbol{\epsilon}}_p^{(II)}, \quad (4.89)$$

$$\mathbf{0} = ^{(II)}\mathbf{K}_p^{(k)} - ^{(I)}\mathbf{K}_p - \Delta t \stackrel{\Delta}{\mathbf{K}}_p^{(II)}, \quad (4.90)$$

$$\mathbf{0} = ^{(II)}\boldsymbol{\epsilon}_k - ^{(I)}\boldsymbol{\epsilon}_k - \Delta t \stackrel{\Delta}{\boldsymbol{\epsilon}}_k^{(II)}, \quad (4.91)$$

$$\mathbf{0} = ^{(II)}\mathbf{K}_k - ^{(I)}\mathbf{K}_k - \Delta t \stackrel{\Delta}{\mathbf{K}}_k^{(II)}, \quad (4.92)$$

$$0 = ^{(II)}k - ^{(I)}k - \Delta t \dot{k}^{(II)} \quad (4.93)$$

mit

$$0 = ^{(II)}s - ^{(I)}s - \Delta t \dot{s}^{(II)} \quad (4.94)$$

vor, die zusammen mit den Spannungen

$$\mathbf{S}_{t+\Delta t} = \mathbb{C} \left[ \boldsymbol{\epsilon}_{t+\Delta t} - (\boldsymbol{\epsilon}_p)_{t+\Delta t} \right], \quad (4.95)$$

$$(\mathbf{S}_c)_{t+\Delta t} = \mathbb{D} \left[ \mathbf{K}_{t+\Delta t} - (\mathbf{K}_p)_{t+\Delta t} \right], \quad (4.96)$$

$$\mathbf{P}_{t+\Delta t} = \mathbf{S}_{t+\Delta t} + \left( \mathbf{K}_{t+\Delta t} - (\mathbf{K}_p)_{t+\Delta t} \right)^T (\mathbf{S}_c)_{t+\Delta t}, \quad (4.97)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t} = \mathbb{H} \left[ (\boldsymbol{\epsilon}_k)_{t+\Delta t} \right], \quad (4.98)$$

$$(\boldsymbol{\xi}_c)_{t+\Delta t} = \mathbb{H}_c \left[ (\mathbf{K}_k)_{t+\Delta t} \right], \quad (4.99)$$

und der Fließfunktion

$$^{(II)}f = 0 \quad (4.100)$$

ein implizites, nichtlineares Gleichungssystem bilden, dass mit einem lokalen NEWTON-Verfahren gelöst werden kann. Am Ende des zweiten Operators stehen damit die Größen

$$\mathbf{S}_{t+\Delta t}, (\mathbf{S}_c)_{t+\Delta t}, \mathbf{P}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}, (\boldsymbol{\xi}_p)_{t+\Delta t}, (\boldsymbol{\xi}_c)_{t+\Delta t}, \quad (4.101)$$

$$(\boldsymbol{\epsilon}_p)_{t+\Delta t}, (\mathbf{K}_p)_{t+\Delta t}, (\boldsymbol{\epsilon}_k)_{t+\Delta t}, (\mathbf{K}_k)_{t+\Delta t}, k_{t+\Delta t}, s_{t+\Delta t} \quad (4.102)$$

des aktuellen Zeitschrittes fest.



#### 4.3.5 Diskretisierung, Konsistente Tangente und lokales NEWTON-Verfahren

Der gesamte Bereich  $\mathcal{R}_R$  wird in eine endliche Anzahl von abgeschlossenen Teilbereichen  $\mathcal{R}_R^{(e)}$  zerlegt. Man bezeichnet diese Teilbereiche häufig als Elemente der Zerlegung. Eckpunkte von  $\mathcal{R}_R^{(e)}$  werden Knoten genannt. Für jedes Element  $\mathcal{R}_R^{(e)}$  werden ortsabhängige lokale Formfunktionen (bzw. Ansatzfunktionen)  $N_p$  eingeführt, so dass sich die unabhängigen Variablen, d.h. Verschiebungen und mikropolare Rotationen sowie deren Variation anhand der Linearkombinationen

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p \mathbf{u}_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p \Delta^{(i)} \mathbf{u}_p, \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} \delta \mathbf{u}_Q N_Q, \quad (4.103)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(i+1)} = \exp \left( \text{spn} \left( \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p \Delta^{(i)} \mathbf{m}_p \right) \right) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \quad \delta \mathbf{m} = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} \delta \mathbf{m}_Q N_Q \quad (4.104)$$

innerhalb der Elemente interpolieren lassen, siehe hierzu BATHE [4], WRIGGERS [86], BELYTSCHKO [7], SCHÄFER [68], CRISFIELD [15], [16]. Kennzeichen für das GALERKIN-Verfahren ist, dass  $\Delta^{(i)} \mathbf{u}_p$  und  $\delta \mathbf{u}_p$  aus dem selben Funktionenraum stammen, siehe Elsässer [21]. Die Indizes  $P$  und  $Q$  laufen über alle Knoten  $n^{(e)}$  des betrachteten Elementes. Die Größen  $\Delta^{(i)} \mathbf{u}_p$ ,  $\mathbf{u}_p^{(i)}$ ,  $\delta \mathbf{u}_p$ ,  $\Delta^{(i)} \mathbf{m}_p$  und  $\delta \mathbf{m}_p$  sind nicht kontinuierlich vom Ort abhängig, sondern nur noch diskret von den Knoten des betrachteten Elementes. In dieser Arbeit werden als Formfunktionen  $N_p$  und  $N_Q$  jeweils identische Polynome für die Verschiebungen und Rotationen und deren Variation verwendet. Im Rahmen des Galerkin-Verfahrens stellen  $\delta \mathbf{u}_p$  und  $\delta \mathbf{m}_p$  beliebige Koeffizienten dar.

Bei simultaner Lösung der mikropolaren Gleichgewichtsbedingungen erhält man aus den Funktionalableitungen (4.66)–(4.69) eine voll gekoppelte Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^{(e)} := \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{um} \\ \mathbf{K}^{mu} & \mathbf{K}^{mm} \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

mit dem Elementlösungsvektor

$$\Delta \Phi^{(e)} := \begin{pmatrix} \Delta^{(i)} \mathbf{u} \\ \Delta^{(i)} \mathbf{m} \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

Der Elementlastvektor wird aus den Funktionalen der letzten NEWTON-Iteration gebildet:

$$\mathbf{F}^{(e)} := \begin{pmatrix} \mathbf{F}^u \\ \mathbf{F}^m \end{pmatrix}. \quad (4.107)$$

Die Matrix  $\mathbf{K}^{(e)}$  enthält Untermatrizen der Verschiebungen  $\mathbf{K}^{uu}$ , der mikropolaren Rotationen  $\mathbf{K}^{mm}$  und der gekoppelten Steifigkeiten  $\mathbf{K}^{um}$ ,  $\mathbf{K}^{mu}$ . Der Elementlastvektor besteht aus den Verschiebungskomponenten  $\mathbf{F}^u$  und Rotationskomponenten  $\mathbf{F}^m$ . Die Einträge von  $\mathbf{K}^{(e)}$  und  $\mathbf{F}^{(e)}$  werden durch numerische Integration (meist mit dem sogenannten Gauß-Verfahren) gewonnen. Bei der anschließenden Assemblierung wird mit Hilfe der Zuordnung von globalen und elementweisen Knotenindizes ein Gesamtgleichungssystem erzeugt:

$$\mathbf{K} [\Delta \Phi] = \mathbf{F}. \quad (4.108)$$

Hierbei wird  $\mathbf{K}$  als Steifigkeitsmatrix,  $\Delta\Phi$  als Lösungsvektor und  $\mathbf{F}$  als Lastvektor bezeichnet. Die eckige Klammer bedeutet eine einfache Summation über räumliche und knotenweise Indizes. (4.108) stellt ein lineares Gleichungssystem dar, das mit geeigneten numerischen Verfahren gelöst werden kann.

Die Ableitungen der Spannungen und Koppelspannungen in den Gleichungen (4.66)–(4.69),

$$\mathbb{C}_1 := \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \mathbf{F}^{(i)}}, \quad (4.109)$$

$$\mathbb{C}_2 := \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}, \quad (4.110)$$

$$\mathbb{C}_3 := \frac{\partial \mathbf{S}^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}}, \quad (4.111)$$

$$\mathbb{C}_4 := \frac{\partial \mathbf{S}_c^{(i)}}{\partial \mathbf{F}^{(i)}}, \quad (4.112)$$

$$\mathbb{C}_5 := \frac{\partial \mathbf{S}_c^{(i)}}{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}, \quad (4.113)$$

$$\mathbb{C}_6 := \frac{\partial \mathbf{S}_c^{(i)}}{\partial \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}}, \quad (4.114)$$

sowie die Ableitungen zur Bestimmung der Funktionalmatrix (4.117) innerhalb des Korrektorschrittes werden durch numerische Differentiation bestimmt.

Im Fall des lokalen NEWTON-Verfahrens mit dem Iterationsindex ( $k$ ) stellt der Vektor  $\mathbf{r}$  das Residuum des nichtlinearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varrho}) \boldsymbol{\varrho} = \mathbf{b}$  dar (siehe SCHÄFER [68] S. 165):

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) [\boldsymbol{\varrho}^{(k)}] - \mathbf{b}. \quad (4.115)$$

Dieser Vektor wird aus den Gleichungen (4.89)–(4.93) und (4.100) gebildet. Das Lösungsincrement ist definiert durch

$$\Delta^{(k)} \boldsymbol{\varrho} := -(\boldsymbol{\varrho}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varrho}^{(k)}). \quad (4.116)$$

und setzt sich aus den Inkrementen der plastischen Variablen  $\epsilon_p, \mathbf{K}_p, \epsilon_k, \mathbf{K}_k, k, s$  zusammen. Die Iterationsvorschrift ist durch

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{\varrho})}{\partial \varrho_j} \right]_{\boldsymbol{\varrho}=\boldsymbol{\varrho}^{(k)}} \Delta^{(k)} \varrho_j = \mathbf{r}(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}). \quad (4.117)$$

festgelegt. Im Fall von (4.117) spricht man auch von einem diskretisierten NEWTON-Verfahren. In PREUSS und BIERBAUM [64] S. 127 wird eine solche Methode in Verbindung mit einem vorwärtigen Differenzenquotienten beschrieben. Darüber hinaus geben die Autoren eine Formel für die Diskretisierungsschrittweite  $h$  der Komponente  $j$  in der NEWTON-Iteration ( $k$ ) an:

$$h_j^{(k)} := \min \left\{ \epsilon_{rel} |\mathbf{x}_j^{(k)}| + \epsilon_{abs}, \|\mathbf{r}(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})\| \right\}, \quad (4.118)$$

wobei  $\mathbf{r}$  wiederum den Residuumsvektor und  $\boldsymbol{\varrho}$  den Lösungsvektor bezeichnet. Nach [64] haben sich die Werte  $\varepsilon_{rel} = 10^{-5}$  und  $\varepsilon_{abs} = 10^{-10}$  bewährt und wurden auch im Rahmen dieser Arbeit bei allen numerischen Differentiationen verwendet. Die Approximation der Funktionalmatrizen lautet damit

$$\frac{\partial r_i}{\partial \varrho_j} \approx \frac{r_i(\boldsymbol{\varrho}^{(k)} + h_j^{(k)} \mathbf{e}_j) - r_i(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})}{h_j^{(k)}}, \quad (4.119)$$

wobei  $\mathbf{e}_j$  einen Koordinateneinheitsvektor mit  $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  darstellt. Die 1 steht dabei an der  $j$ -ten Koordinate.

---

### Kleine Deformationen

---

Bei kleinen Deformationen werden Verschiebungs- und Rotationsfeld über

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \quad (4.120)$$

$$\mathbf{m}^{(i+1)} = \mathbf{m}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{m}, \quad (4.121)$$

dargestellt. Die Linearisierten Verschiebungen und Rotationsmaße ergeben damit

$$\left[ \frac{d\mathbf{H}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.122)$$

$$\left[ \frac{d\mathbf{M}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})}{d\mu} \right]_{\mu=0} = \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}), \quad (4.123)$$

$$\left[ \frac{d\mathbf{K}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})}{d\mu} \right]_{\mu=0} = \frac{\partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4.124)$$

Es wird von einer allgemeinen Abhängigkeit der Spannungen und Koppelspannungen

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}), \mathbf{K}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \\ &= \mathbf{T}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{H}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \mathbf{M}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})), \mathbf{K}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})), \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_c &= \mathbf{T}_c(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}), \mathbf{K}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \\ &= \mathbf{T}_c(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{H}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \mathbf{M}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})), \mathbf{K}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})), \end{aligned} \quad (4.126)$$

ausgegangen, wobei es im Folgenden hilfreich ist, von der Schreibweise

$$\mathcal{W} := (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{H}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \mathbf{M}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})), \mathbf{K}(\mathbf{m}^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \quad (4.127)$$

Gebrauch zu machen. Bei kleinen Deformationen ergeben sich die Ableitungen der Funktionale zu

$$\left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} = \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{d\mathbf{T}(\mathcal{W})}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{d\delta \mathbf{u}}{d\mathbf{x}} dv, \quad (4.128)$$

$$\left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} = \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{d\mathbf{T}(\mathcal{W})}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} dv, \quad (4.129)$$

$$\left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} = \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{d\mathbf{T}_c(\mathcal{W})}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} dv - \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{d\mathbf{T}(\mathcal{W})}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{M} dv, \quad (4.130)$$

$$\left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} = \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{d\mathbf{T}_c(\mathcal{W})}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} dv - \int_{\mathcal{R}} \left[ \frac{d\mathbf{T}(\mathcal{W})}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{M} dv, \quad (4.131)$$

woraus schließlich die Anteile

$$\left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} = \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial (\boldsymbol{\epsilon}^T)^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \frac{d\delta \mathbf{u}}{d\mathbf{x}} dv, \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}} \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} dv \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial \mathbf{K}^{(i)}} \frac{\partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} dv, \end{aligned} \quad (4.133)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}_c^{(i)}}{\partial (\boldsymbol{\epsilon}^T)^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} dv \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial (\boldsymbol{\epsilon}^T)^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{M} dv, \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overline{\mathcal{F}}_c}{d\mu} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}_c^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}} \text{spn}(\Delta \mathbf{m}) \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} dv \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}_c^{(i)}}{\partial \mathbf{K}^{(i)}} \frac{\partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} dv \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}} \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}) \right) \cdot \delta \mathbf{M} dv \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial \mathbf{K}^{(i)}} \frac{\partial \text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m})}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{M} dv \end{aligned} \quad (4.135)$$

hervorgehen. Bei kleinen Deformationen wird ebenfalls ein Prediktor-Korrektor-Verfahren zur Lösung plastischer Probleme eingesetzt. Prinzipiell behalten die Gleichungen (4.70)–(4.100) auch bei kleinen plastischen Verzerrungen und Krümmungen ihre Gültigkeit. Eine Vereinfachung ergibt sich aus dem Wegfall der Transformationen der plastischen Variablen (4.75)–(4.78), da nicht zwischen Referenz- und Momentankonfiguration unterschieden wird. Auf

Grund der materiellen Nichtlinearitäten besteht jedoch weiterhin die Notwendigkeit, das System sowohl global als auch lokal iterativ zu lösen. Berücksichtigt man die Materialgleichungen (3.265) und (3.266), so müssen die Materialtangenten

$$\mathbb{D}_1 := \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}}, \quad (4.136)$$

$$\mathbb{D}_2 := \frac{\partial \mathbf{T}_c^{(i)}}{\partial \mathbf{K}^{(i)}} \quad (4.137)$$

in jeder NEWTON-Iteration bestimmt werden. Wie im Fall von großen Deformationen wird hierfür ein numerisches Differenzenverfahren eingesetzt. Die Diskretisierung der Feldgrößen und der entsprechenden Variationen lässt sich anhand von

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p \mathbf{u}_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p \Delta^{(i)} \mathbf{u}_p, \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{Q=1}^{n(e)} \delta \mathbf{u}_Q N_Q, \quad (4.138)$$

$$\mathbf{m}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p \mathbf{m}_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p \Delta^{(i)} \mathbf{m}_p, \quad \delta \mathbf{m} = \sum_{Q=1}^{n(e)} \delta \mathbf{m}_Q N_Q \quad (4.139)$$

angeben.

#### 4.4 Numerik des mikropolaren Kontaktmodells

Für die starke Formulierung eines Zweikörperkontaktproblems wird zusammengefasst, siehe LAURSEN [50]:

$$(\partial \mathcal{R}_t^s)^u \cup (\partial \mathcal{R}_t^s)^t \cup \gamma^s = (\partial \mathcal{R}_t^s)^m \cup (\partial \mathcal{R}_t^s)^{tc} \cup \gamma^s = \partial \mathcal{R}_t^s, \quad (4.140)$$

$$(\partial \mathcal{R}_t^m)^u \cup (\partial \mathcal{R}_t^m)^t \cup \gamma^m = (\partial \mathcal{R}_t^m)^m \cup (\partial \mathcal{R}_t^m)^{tc} \cup \gamma^m = \partial \mathcal{R}_t^m, \quad (4.141)$$

sowie

$$(\partial \mathcal{R}_t^s)^u \cap (\partial \mathcal{R}_t^s)^t = (\partial \mathcal{R}_t^s)^u \cap \gamma^s = (\partial \mathcal{R}_t^s)^t \cap \gamma^s = \emptyset, \quad (4.142)$$

$$(\partial \mathcal{R}_t^m)^u \cap (\partial \mathcal{R}_t^m)^t = (\partial \mathcal{R}_t^m)^u \cap \gamma^m = (\partial \mathcal{R}_t^m)^t \cap \gamma^m = \emptyset, \quad (4.143)$$

$$(\partial \mathcal{R}_t^s)^m \cap (\partial \mathcal{R}_t^s)^{tc} = (\partial \mathcal{R}_t^s)^m \cap \gamma^s = (\partial \mathcal{R}_t^s)^{tc} \cap \gamma^s = \emptyset, \quad (4.144)$$

$$(\partial \mathcal{R}_t^m)^m \cap (\partial \mathcal{R}_t^m)^{tc} = (\partial \mathcal{R}_t^m)^m \cap \gamma^m = (\partial \mathcal{R}_t^m)^{tc} \cap \gamma^m = \emptyset \quad (4.145)$$

und

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^u = (\partial \mathcal{R}_t^s)^u \cup (\partial \mathcal{R}_t^m)^u, \quad (4.146)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^m = (\partial \mathcal{R}_t^s)^m \cup (\partial \mathcal{R}_t^m)^m, \quad (4.147)$$

$$\mathbf{T}[\mathbf{n}] = \mathbf{t}^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^t = (\partial \mathcal{R}_t^s)^t \cup (\partial \mathcal{R}_t^m)^t, \quad (4.148)$$

$$\mathbf{T}_c[\mathbf{n}] = \mathbf{t}_c^0, \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^{tc} = (\partial \mathcal{R}_t^s)^{tc} \cup (\partial \mathcal{R}_t^m)^{tc} \quad (4.149)$$

sowie

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{R}_t^s \cup \mathcal{R}_t^m, \quad (4.150)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_c \cdot \delta \mathbf{m} + \mathbf{t}_A + \mathbf{b}_c = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{R}_t^s \cup \mathcal{R}_t^m. \quad (4.151)$$

Es folgen die starken Formulierungen der Kontaktbedingungen bezüglich der *slave*-Fläche  $\gamma^s$ .

---

## Starke Formulierung des Normalkontaktes

---

Für die Entwicklung einer schwachen Formulierung des Normalkontaktgesetzes aus Abschnitt 3.3.1 werden die Bedingungen (3.284)–(3.286) bzw. (3.287) in einem äquivalenten Ausdruck zusammengefasst. Gemäß der drei Fälle gilt

$$\text{Kein Kontakt} \quad \Leftrightarrow \quad g > 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0 \text{ und } \dot{g} \text{ beliebig,} \quad (4.152)$$

$$\text{Berührung} \quad \Leftrightarrow \quad g = 0 \text{ und } p = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{g} \geq 0, \quad (4.153)$$

$$\text{Kontakt} \quad \Leftrightarrow \quad p < 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0 \text{ und } \dot{g} = 0, \quad (4.154)$$

wobei  $\check{p}$  durch den gewichteten Kontaktdruck  $p := j \check{p}$  ersetzt wurde. In jedem dieser Fälle gilt (vgl. (3.287))

$$p \leq 0 \quad \text{und} \quad g \geq 0 \quad \text{und} \quad p g = 0, \quad (4.155)$$

wobei wiederum die Fallunterscheidung (4.152)–(4.154) und die Kuhn-Tucker-Bedingungen (4.155) äquivalente Beschreibungen des Normalkontaktmodells darstellen. Man definiert nun einen Multiplikator  $g_n$  (siehe ABBAS [2]) anhand von

$$g_n := p + \rho_n g \quad (4.156)$$

mit einer positive Konstante  $\rho_n$ . Mit der Einführung einer Hilfsfunktion

$$I_0 = I_0(y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } y < 0, \\ 0, & \text{wenn } y \geq 0 \end{cases} \quad (4.157)$$

definiert man noch

$$S_n := I_0(g_n). \quad (4.158)$$

Mit dieser Definition und unter Berücksichtigung von (4.155) lassen sich für die drei Fälle (4.152)–(4.154) notwendige Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{Kein Kontakt} \quad &\Leftrightarrow \quad g > 0 \text{ und } p = 0 \\ &\Rightarrow \quad g_n > 0 \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n g = 0 \text{ und } (1 - S_n) p = 0, \end{aligned} \quad (4.159)$$

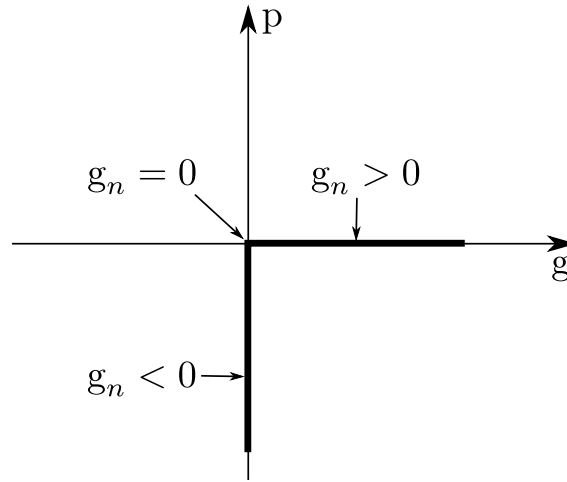
$$\begin{aligned} \text{Berührung} \quad &\Leftrightarrow \quad g = 0 \text{ und } p = 0 \\ &\Rightarrow \quad g_n = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n g = 0 \text{ und } (1 - S_n) p = 0, \end{aligned} \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} \text{Kontakt} \quad &\Leftrightarrow \quad g = 0 \text{ und } p < 0 \\ &\Rightarrow \quad g_n < 0 \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_n g = 0 \text{ und } (1 - S_n) p = 0, \end{aligned} \quad (4.161)$$

formulieren, siehe Bild 4.1. Also gelten in jedem Fall für (4.152)–(4.154) die notwendigen Bedingungen

$$S_n g = 0, \quad (4.162)$$

$$(1 - S_n) p = 0. \quad (4.163)$$



**Abbildung 4.1:** Normalkontaktgesetz mit Regularisierung. Das exakte Normalkontaktgesetz ist durch die dicke Linie gekennzeichnet.

Um diese Gleichungen zu vereinen, teilt man die zweite Gleichung durch einem Homogenisierungskoeffizienten  $h_n \neq 0$  und addiert beide Gleichungen:

$$S_n g + \frac{1}{h_n} (1 - S_n) p = 0, \quad (4.164)$$

oder

$$p - S_n (p + h_n g) = 0. \quad (4.165)$$

Um die Äquivalenz dieser Gleichung mit (4.152)–(4.154) bzw. (4.155) zu zeigen wird nun in umgekehrter Richtung vorgegangen, wobei  $g_n$  als gegeben vorausgesetzt wird (siehe ABBAS [2]):

$$(4.158) \quad (4.165) \quad (4.156) \quad (4.166)$$

$$g_n < 0 \Rightarrow S_n = 1 \Rightarrow g = 0 \Rightarrow p < 0 \Rightarrow \text{Kontakt,} \quad (4.167)$$

$$g_n = 0 \Rightarrow S_n = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow g = 0 \Rightarrow \text{Berührung,} \quad (4.168)$$

$$g_n > 0 \Rightarrow S_n = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow g > 0 \Rightarrow \text{Kein Kontakt.} \quad (4.169)$$

Für den Kontaktdruck kann unter Berücksichtigung von (4.158) auch

$$\check{p} = S_n \check{p} \quad (4.170)$$

geschrieben werden.

---

### Starke Formulierung des Tangentialkontaktes

---

Wie im Fall des Normalkontaktes ist nun das Ziel, eine äquivalente Darstellung des Tangentialkontaktes herzuleiten. Es wird dabei der Dokumentation von ABBAS [2] gefolgt. Ausgangspunkt ist das klassische COULOMB'sche Reibgesetz aus Abschnitt 3.3.2. Es werden zunächst

die Fälle Haftung, Grenzhafteung und Reibung betrachtet, so wie sie in (3.290) und (3.291) eingeführt wurden, wobei

$$\text{Haftung oder Grenzhafteung oder Reibung} \Leftrightarrow \text{Kontakt} \Leftrightarrow \check{p} < 0 \quad (4.171)$$

gilt. Es sei noch einmal erwähnt, dass die Fallunterscheidung

$$\text{Haftung :} \quad \|\mathbf{t}_T\| < \eta |\check{p}| \Rightarrow \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.172)$$

$$\text{Grenzhafteung oder Reibung :} \quad \|\mathbf{t}_T\| = \eta |\check{p}| \Rightarrow \exists \alpha_T \geq 0; \mathbf{v}_T = -\alpha_T \mathbf{t}_T \quad (4.173)$$

und in allen Fällen

$$\mathbf{g} \mathbf{t}_T = \mathbf{0}. \quad (4.174)$$

gilt. Es ist nun zweckmäßig, einen Vektor  $\Lambda$  durch

$$\Lambda := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für } \check{p} = 0 \text{ Kein Kontakt und Berührung} \\ -\frac{\mathbf{t}_T}{\eta |\check{p}|} & \text{für } \check{p} < 0 \text{ Kontakt} \end{cases} \quad (4.175)$$

zu definieren. Aus (4.172) und (4.173) folgt dann, dass

$$\|\Lambda\| \leq 1. \quad (4.176)$$

In der Tat hat man

$$\text{Kein Kontakt oder Berührung} \Leftrightarrow \check{p} = 0 \text{ und } \|\Lambda\| = 0, \quad (4.177)$$

$$\text{Haftung} \Leftrightarrow \check{p} < 0 \text{ und } \|\mathbf{t}_T\| < \eta |\check{p}| \Leftrightarrow \check{p} < 0 \text{ und } \|\Lambda\| < 1, \quad (4.178)$$

$$\text{Grenzhafteung oder Reibung} \Leftrightarrow \check{p} < 0 \text{ und } \|\mathbf{t}_T\| = \eta |\check{p}| \Leftrightarrow \check{p} < 0 \text{ und } \|\Lambda\| = 1. \quad (4.179)$$

Aus der Definition von  $\Lambda$  in (4.175) folgt zusätzlich, dass

$$\mathbf{t}_T = \eta \check{p} \Lambda \quad (4.180)$$

immer gilt. Schließlich gilt für Kontakt noch die Gleichung

$$\Lambda \cdot \mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_T\|, \quad (4.181)$$

was man mit den Beziehungen

$$\text{Haftung} \Rightarrow \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \text{ und } \|\mathbf{v}_T\| = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_T \cdot \Lambda = \|\mathbf{v}_T\|, \quad (4.182)$$

$$\text{Grenzhafteung oder Reibung} \Rightarrow \mathbf{v}_T = -\alpha_T \eta |\check{p}| \Lambda \text{ und } \|\Lambda\| = 1. \Rightarrow \mathbf{v}_T \cdot \Lambda = \|\mathbf{v}_T\| \quad (4.183)$$

zeigen kann. Umgekehrt wird nun gezeigt, dass aus (4.176), (4.180) und (4.181) die Ausgangsform des Gesetzes (4.172) und (4.173) folgt:

$$\|\Lambda\| = 1 \text{ und } \mathbf{t}_T = \eta \check{p} \Lambda \Rightarrow \|\mathbf{t}_T\| = \eta |\check{p}| \|\Lambda\| = \eta |\check{p}|, \quad (4.184)$$

$$\|\Lambda\| = 1 \text{ und } \Lambda \cdot \mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_T\| \Rightarrow \|\mathbf{v}_T\| \geq 0, \quad (4.185)$$

$$\|\Lambda\| < 1 \text{ und } \mathbf{t}_T = \eta \check{p} \Lambda \Rightarrow \|\mathbf{t}_T\| = \eta_c |\check{p}| \|\Lambda\| < \eta |\check{p}|, \quad (4.186)$$

$$\|\Lambda\| < 1 \text{ und } \Lambda \cdot \mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_T\| \Rightarrow \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.187)$$



so dass

$$(4.184) \text{ und } (4.185) \Rightarrow \text{Grenzhaftung oder Reibung}, \quad (4.188)$$

$$(4.186) \text{ und } (4.187) \Rightarrow \text{Haftung}. \quad (4.189)$$

Damit wurde gezeigt, dass die Bedingungen (4.172) und (4.173) mit der Einführung eines Vektors  $\Lambda$  auch äquivalent in Form der Bedingungen

$$\|\Lambda\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_T = \eta \, \check{p} \, \Lambda \quad \text{und} \quad \Lambda \cdot \mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_T\| \quad (4.190)$$

ausgedrückt werden können.

Nun wird eine zweite äquivalente Form zu dem Reibgesetz (4.172) und (4.173) hergeleitet. Ziel ist, im Hinblick auf eine schwache Formulierung das Gesetz anhand von einer Gleichung aufzustellen. Zunächst werden unter Berücksichtigung des Vektors  $\Lambda$  alle möglichen Kontaktzustände betrachtet:

$$\text{Kein Kontakt} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} = 0 \text{ und } g > 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.191)$$

$$\text{Berührung} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} = 0 \text{ und } g = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.192)$$

$$\text{Haftung} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\Lambda\| < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.193)$$

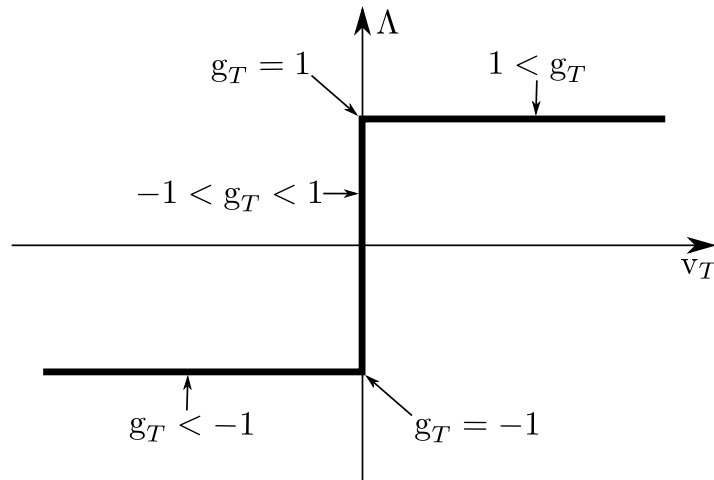
$$\text{Grenzhaftung} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\Lambda\| = 1 \text{ und } \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.194)$$

$$\text{Reibung} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \Lambda = \frac{\mathbf{v}_T}{\|\mathbf{v}_T\|} \text{ und } \mathbf{v}_T \neq \mathbf{0}. \quad (4.195)$$

Wie in ABBAS [2] wird eine vektorwertige Multiplikatorfunktion (Regularisierung)

$$\mathbf{g}_T := \Lambda + \rho_T \mathbf{v}_T \quad (4.196)$$

eingeführt, wobei  $\rho_T$  eine positive Konstante darstellt. Mit Hilfe der Funktion



**Abbildung 4.2:** Reibungsgesetz von COULOMB. Das exakte Gesetz ist durch die dicke Linie gekennzeichnet. Die Darstellung gilt für eine eindimensionale Betrachtung.

$$I_1 = I_1(\mathbf{y}) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \|\mathbf{y}\| < 1, \\ 0, & \text{wenn } \|\mathbf{y}\| \geq 1 \end{cases} \quad (4.197)$$

wird dann analog zu  $S_n$  in (4.158) die Größe

$$S_T := I_1(\mathbf{g}_T) \quad (4.198)$$

eingeführt. Mit  $\check{p} < 0$  erhält man dann

$$\text{Haftung} \quad \Leftrightarrow \quad \|\Lambda\| < 1 \text{ und } \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{g}_T\| < 1 \quad \Rightarrow \quad S_T = 1, \quad (4.199)$$

$$\text{Grenzhaftung} \quad \Leftrightarrow \quad \|\Lambda\| = 1 \text{ und } \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{g}_T\| = 1 \quad \Rightarrow \quad S_T = 0, \quad (4.200)$$

$$\text{Reibung} \quad \Leftrightarrow \quad \|\Lambda\| = 1 \text{ und } \mathbf{v}_T \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{g}_T\| > 1 \quad \Rightarrow \quad S_T = 0, \quad (4.201)$$

siehe Bild 4.2, so dass  $S_T$  die eindeutige Zuordnung der Fälle

$$\text{Haftung} \Leftrightarrow S_T = 1, \quad (4.202)$$

$$\text{Grenzhaftung oder Reibung} \Leftrightarrow S_T = 0 \quad (4.203)$$

liefert. Auf der gesamten Zwischenschicht  $\gamma_s$  gilt mit (4.158) und (4.191)–(4.195) zunächst

$$\text{Kein Kontakt} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.204)$$

$$\text{Berührung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.205)$$

$$\text{Haftung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.206)$$

$$\text{Grenzhaftung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.207)$$

$$\text{Reibung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.208)$$

also insgesamt

$$(1 - S_n) \Lambda = \mathbf{0}. \quad (4.209)$$

Wiederum aus (4.191)–(4.195) folgt

$$\text{Kein Kontakt} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_T \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.210)$$

$$\text{Berührung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_T \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.211)$$

$$\text{Haftung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_T = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad S_n S_T \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.212)$$

$$\text{Grenzhaftung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_T = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_T \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \quad (4.213)$$

$$\text{Reibung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_T = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_T \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \quad (4.214)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Kein Kontakt} & \Rightarrow S_n = 0 \\ & \Rightarrow S_n (1 - S_T) \left( \Lambda - \frac{\Lambda}{\|\Lambda\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.215)$$

$$\begin{aligned} \text{Berührung} & \Rightarrow S_n = 0 \\ & \Rightarrow S_n (1 - S_T) \left( \Lambda - \frac{\Lambda}{\|\Lambda\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.216)$$

$$\begin{aligned} \text{Haftung} & \Rightarrow S_n = 1 \text{ und } S_T = 1 \\ & \Rightarrow S_n (1 - S_T) \left( \Lambda - \frac{\Lambda}{\|\Lambda\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.217)$$

$$\begin{aligned} \text{Grenzhaftung} & \Rightarrow S_n = 1 \text{ und } S_T = 0 \text{ und } \|\Lambda\| = 1 \\ & \Rightarrow S_n (1 - S_T) \left( \Lambda - \frac{\Lambda}{\|\Lambda\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.218)$$

$$\begin{aligned} \text{Reibung} & \Rightarrow S_n = 1 \text{ und } S_T = 0 \text{ und } \Lambda = \frac{\mathbf{v}_T}{\|\mathbf{v}_T\|} \\ & \Rightarrow S_n (1 - S_T) \left( \Lambda - \frac{\Lambda}{\|\Lambda\|} \right) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.219)$$

bezüglich  $\gamma^s$ . Im Fall der Reibung ist der Vektor  $\Lambda$  positiv proportional zu  $\mathbf{v}_T$ , siehe (4.195). Man kann mit der Einführung eines Homogenisierungskoeffizienten  $h_T > 0$  auch

$$\frac{\Lambda}{\|\Lambda\|} = \frac{\mathbf{v}_T}{\|\mathbf{v}_T\|} = \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \quad (4.220)$$

schreiben. Dies wird in die Ausdrücke aus der Fallunterscheidung oben eingesetzt:

$$S_n (1 - S_T) \left( \Lambda - \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.221)$$

Es ist zweckmäßig, Gleichungen (4.210)–(4.214) auch in der Form

$$S_n S_T h_T \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \quad (4.222)$$

zusammenzufassen. Die beiden letzten Gleichungen können nun von einander abgezogen werden, so dass

$$S_n \left( (1 - S_T) \Lambda - S_T h_T \mathbf{v}_T - (1 - S_T) \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.223)$$

Wird auch noch der Ausdruck aus Fallunterscheidung (4.209) hinzugenommen, dann folgt aus dem COULOMB'schen Gesetz die Gleichung:

$$(1 - S_n) \Lambda + S_n \left( (1 - S_T) \Lambda - S_T h_T \mathbf{v}_T - (1 - S_T) \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.224)$$

Dass diese Gleichung eine äquivalente Form des COULOMB'schen Gesetzes darstellt, lässt sich ebenfalls zeigen, siehe ABBAS [2]. Der Vollständigkeit halber wird dieser Beweis hier kurz skizziert, wobei die Definition (4.175) zu beachten ist. Zuerst betrachtet man

$$S_n = 0 \Rightarrow \Lambda = \mathbf{0}, \quad (4.225)$$

was unabhängig von  $\mathbf{v}_T$  gilt. Bei keinem Kontakt oder bei Berührung existieren also keine vom Nullvektor verschiedene Spannungsvektoren der Haftung oder Reibung. Bei Kontakt mit  $S_n = 1$  wird der Fall

$$\begin{aligned} S_T = 0 &\Rightarrow \|\mathbf{g}_T\| = \|\Lambda + \rho_T \mathbf{v}_T\| \geq 1 \text{ und } \|\Lambda\| = 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq \|\Lambda + \rho_T \mathbf{v}_T\| \leq \|\Lambda\| + \rho_T \|\mathbf{v}_T\| \\ &\Rightarrow \|\mathbf{v}_T\| \geq 0 \\ &\Rightarrow \text{Grenzhaftung oder Reibung} \end{aligned} \quad (4.226)$$

untersucht, wobei in der zweiten Zeile die Dreiecksungleichung verwendet wurde. Ferner folgt man ebenfalls unter der Voraussetzung  $S_n = 1$ :

$$\begin{aligned} S_T = 1 &\Rightarrow \|\mathbf{g}_T\| = \|\Lambda + \rho_T \mathbf{v}_T\| < 1 \text{ und } h_T \mathbf{v}_T = \mathbf{0}, \\ &\Rightarrow \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \text{ und } \|\Lambda\| < 1 \\ &\Rightarrow \text{Haftung.} \end{aligned} \quad (4.227)$$

Damit lassen sich aus Gleichung (4.224) die Bedingungen (4.172) und (4.173) zurückgewinnen.

Weiterhin greift man auf (4.175) zurück und erhält

$$\mathbf{t}_T = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für } g > 0, \\ \eta \check{\Lambda} & \text{für } g = 0. \end{cases} \quad (4.228)$$

Mit Hilfe von  $S_n$  kann nun die Materialgleichung folgenderweise verallgemeinert werden:

$$\mathbf{t}_T = S_n \eta \check{\Lambda}. \quad (4.229)$$

Da für den Vektor  $\Lambda$  bei Kontakt

$$\Lambda = \begin{cases} \Lambda, & S_T = 1, \\ \frac{\Lambda}{\|\Lambda\|}, & S_T = 0 \end{cases} \quad (4.230)$$

gilt und mit (4.220) auch

$$\Lambda = \begin{cases} \Lambda, & S_T = 1, \\ \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|}, & S_T = 0, \end{cases} \quad (4.231)$$

kann  $\Lambda$  im Kontaktfall äquivalent anhand von

$$\Lambda = S_T \Lambda + (1 - S_T) \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \quad (4.232)$$

ausgedrückt werden. Diese Gleichung setzt man in (4.229) ein und erhält schließlich

$$\mathbf{t}_T = S_n \left( S_T \eta \check{\Lambda} + (1 - S_T) \eta \check{\frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|}} \right). \quad (4.233)$$

---

## Starke Formulierung des Rotationskontaktes

---

Die Vorgehensweise aus dem letzten Abschnitt wird nun für den Fall mikroskopischer Rotationsreibung und -haftung generalisiert. Es wird dabei von den Gesetzen (3.295) und (3.296) der mikropolaren Haftung und Reibung aus Abschnitt 3.3.3 ausgegangen. Für  $\check{p} < 0$  seien diese Bedingungen nochmal erwähnt:

$$\text{Haftrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{t}_c^s\| < \eta_c |\check{p}| \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (4.234)$$

$$\text{Grenzhaftrotation oder Reibrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{t}_c^s\| = \eta_c |\check{p}| \Rightarrow \exists \alpha_R \geq 0; \Delta\boldsymbol{\omega} = -\alpha_R \mathbf{t}_c^s, \quad (4.235)$$

wobei in allen Fällen gilt

$$g \mathbf{t}_c^s = \mathbf{0}. \quad (4.236)$$

Auch bei Rotationskontakt ist es zweckmäßig, einen Vektor  $\boldsymbol{\Lambda}_c$  durch die Definition

$$\boldsymbol{\Lambda}_c := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für } \check{p} = 0 \quad (\text{Kein Kontakt und Berührung}), \\ -\frac{\mathbf{t}_c^s}{\eta_c |\check{p}|} & \text{für } \check{p} < 0 \quad (\text{Kontakt}) \end{cases} \quad (4.237)$$

einzuführen. Mit (4.234) und (4.235) folgt zunächst

$$\|\boldsymbol{\Lambda}_c\| \leq 1, \quad (4.238)$$

was man mit

$$\text{Kein Kontakt oder Berührung} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} = 0 \text{ und } \|\boldsymbol{\Lambda}_c\| = 0, \quad (4.239)$$

$$\begin{aligned} \text{Haftrotation} & \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\mathbf{t}_c^s\| < \eta_c |\check{p}| \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\boldsymbol{\Lambda}_c\| < 1, \end{aligned} \quad (4.240)$$

$$\begin{aligned} \text{Grenzhaftrotation oder Reibrotation} & \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\mathbf{t}_c^s\| = \eta_c |\check{p}| \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\boldsymbol{\Lambda}_c\| = 1 \end{aligned} \quad (4.241)$$

zeigen kann. Aus der Definition (4.237) erhält man weiterhin

$$\mathbf{t}_c^s = \eta_c \check{p} \boldsymbol{\Lambda}_c. \quad (4.242)$$

Bei Kontakt gilt schließlich

$$\boldsymbol{\Lambda}_c \cdot \Delta\boldsymbol{\omega} = \|\Delta\boldsymbol{\omega}\|, \quad (4.243)$$

was man mit den Folgerungen

$$\begin{aligned} \text{Haftrotation} & \quad \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \text{ und } \|\Delta\boldsymbol{\omega}\| = 0 \\ & \quad \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_c = \|\Delta\boldsymbol{\omega}\|, \end{aligned} \quad (4.244)$$

$$\begin{aligned} \text{Grenzhaftrotation oder Reibrotation} & \quad \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{\omega} = -\alpha_T \eta |\check{p}| \boldsymbol{\Lambda}_c \text{ und } \|\boldsymbol{\Lambda}_c\| = 1 \\ & \quad \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_c = \|\Delta\boldsymbol{\omega}\| \end{aligned} \quad (4.245)$$

zeigen kann. Nun wird umgekehrt aus (4.238), (4.242) und (4.243) die Ausgangsform (4.234) und (4.235) gefolgt:

$$\|\Lambda_c\| = 1 \text{ und } \mathbf{t}_c^s = \eta_c \check{p} \Lambda_c \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{t}_c^s\| = \eta_c |\check{p}| \|\Lambda_c\| = \eta_c |\check{p}|, \quad (4.246)$$

$$\|\Lambda_c\| = 1 \text{ und } \Lambda_c \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} = \|\Delta \boldsymbol{\omega}\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta \boldsymbol{\omega}\| \geq 0, \quad (4.247)$$

$$\|\Lambda_c\| < 1 \text{ und } \mathbf{t}_c^s = \eta_c \check{p} \Lambda_c \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{t}_c^s\| = \eta_c |\check{p}| \|\Lambda_c\| < \eta_c |\check{p}|, \quad (4.248)$$

$$\|\Lambda_c\| < 1 \text{ und } \Lambda_c \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} = \|\Delta \boldsymbol{\omega}\| \quad \Rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (4.249)$$

so dass

$$(4.246) \text{ und } (4.247) \quad \Rightarrow \quad \text{Grenzhaftung oder Reibung}, \quad (4.250)$$

$$(4.248) \text{ und } (4.249) \quad \Rightarrow \quad \text{Haftung}. \quad (4.251)$$

Mit der ersten äquivalenten Formulierung wurde gezeigt, dass die Ungleichungsbedingung (4.234) mit der Einführung eines Vektors  $\Lambda_c$  auch anhand von Gleichungen ausgedrückt werden kann.

Nun wird eine zweite äquivalente Form zu dem generalisierten COULOMB'schen Gesetz (4.234) und (4.235) hergeleitet. Ziel ist, im Hinblick auf eine schwache Formulierung das generalisierte Gesetz anhand von einer Gleichung aufzustellen. Die möglichen Kontaktfälle seien nochmal zusammengefasst:

$$\text{Kein Kontakt} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} = 0 \text{ und } g > 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_c = \mathbf{0}, \quad (4.252)$$

$$\text{Berührung} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} = 0 \text{ und } g = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_c = \mathbf{0}, \quad (4.253)$$

$$\text{Haftrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\Lambda_c\| < 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (4.254)$$

$$\text{Grenzhaftrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \|\Lambda_c\| = 1 \text{ und } \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (4.255)$$

$$\text{Reibrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \check{p} < 0 \text{ und } \Lambda_c = \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\|\Delta \boldsymbol{\omega}\|} \text{ und } \Delta \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}. \quad (4.256)$$

In Analogie zu (4.196) wird ein vektorwertiger Multiplikator  $\mathbf{g}_R$  definiert,

$$\mathbf{g}_R := \Lambda_c + \rho_R \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (4.257)$$

wobei  $\rho_R > 0$  ein Regularisierungsparameter darstellt. Man definiert auch bei Rotationskontakt mit Hilfe von (4.197) den Wert

$$S_R := I_1(\mathbf{g}_R). \quad (4.258)$$

Unter Berücksichtigung von (4.254)–(4.256) erhält man mit  $\check{p} < 0$ :

$$\text{Haftrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \|\Lambda_c\| < 1 \text{ und } \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{g}_R\| < 1 \quad \Rightarrow \quad S_R = 1, \quad (4.259)$$

$$\text{Grenzhaftrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \|\Lambda_c\| = 1 \text{ und } \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{g}_R\| = 1 \quad \Rightarrow \quad S_R = 0, \quad (4.260)$$

$$\text{Reibrotation} \quad \Leftrightarrow \quad \|\Lambda_c\| = 1 \text{ und } \Delta \boldsymbol{\omega} = \|\Delta \boldsymbol{\omega}\| \Lambda_c \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{g}_R\| > 1 \quad \Rightarrow \quad S_R = 0, \quad (4.261)$$

oder auch

$$\text{Haftrotation} \quad \Leftrightarrow \quad S_R = 0, \quad (4.262)$$

$$\text{Grenzhaft- und Reibrotation} \quad \Leftrightarrow \quad S_R = 1. \quad (4.263)$$

Die Bedingungen (4.252)–(4.256) lassen sich mit Hilfe von  $S_n$  und  $S_R$  auch jeweils für die gesamte Kontaktzwischenschicht  $\gamma^s$  formulieren:

$$\text{Kein Kontakt} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_c = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda_c = \mathbf{0}, \quad (4.264)$$

$$\text{Berührung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_c = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda_c = \mathbf{0}, \quad (4.265)$$

$$\text{Haftrotation} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda_c = \mathbf{0}, \quad (4.266)$$

$$\text{Grenzhaftrotation} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda_c = \mathbf{0}, \quad (4.267)$$

$$\text{Reibrotation} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - S_n) \Lambda_c = \mathbf{0}. \quad (4.268)$$

Insgesamt gilt auf  $\gamma^s$  demnach:

$$(1 - S_n) \Lambda_c = \mathbf{0}. \quad (4.269)$$

Außerdem liefern (4.252)–(4.256) auf  $\gamma^s$ :

$$\text{Kein Kontakt} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_R \Delta \omega = \mathbf{0}, \quad (4.270)$$

$$\text{Berührung} \quad \Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_R \Delta \omega = \mathbf{0}, \quad (4.271)$$

$$\text{Haftrotation} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_R = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta \omega = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad S_n S_R \Delta \omega = \mathbf{0}, \quad (4.272)$$

$$\text{Grenzhaftrotation} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_R = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_R \Delta \omega = \mathbf{0}, \quad (4.273)$$

$$\text{Reibrotation} \quad \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_R = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n S_R \Delta \omega = \mathbf{0} \quad (4.274)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Kein Kontakt} \quad & \Rightarrow \quad S_n = 0 \\ & \Rightarrow \quad S_n (1 - S_R) \left( \Lambda_c - \frac{\Lambda_c}{\|\Lambda_c\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.275)$$

$$\begin{aligned} \text{Berührung} \quad & \Rightarrow \quad S_n = 0 \\ & \Rightarrow \quad S_n (1 - S_R) \left( \Lambda_c - \frac{\Lambda_c}{\|\Lambda_c\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.276)$$

$$\begin{aligned} \text{Haftrotation} \quad & \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_R = 1 \\ & \Rightarrow \quad S_n (1 - S_R) \left( \Lambda_c - \frac{\Lambda_c}{\|\Lambda_c\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.277)$$

$$\begin{aligned} \text{Grenzhaftrotation} \quad & \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_R = 0 \text{ und } \|\Lambda_c\| = 1 \\ & \Rightarrow \quad S_n (1 - S_R) \left( \Lambda_c - \frac{\Lambda_c}{\|\Lambda_c\|} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.278)$$

$$\begin{aligned} \text{Reibrotation} \quad & \Rightarrow \quad S_n = 1 \text{ und } S_R = 0 \text{ und } \Lambda_c = \frac{\Delta \omega}{\|\Delta \omega\|} \\ & \Rightarrow \quad S_n (1 - S_R) \left( \Lambda_c - \frac{\Lambda_c}{\|\Lambda_c\|} \right) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.279)$$

Die Vektoren  $\Lambda_c$  und  $\Delta \omega$  sind bei Rotationsreibung positiv proportional, siehe (4.261), so dass mit Hilfe eines Homogenisierungskoeffizienten  $h_R > 0$  die Gleichungen

$$\frac{\Lambda_c}{\|\Lambda_c\|} = \frac{\Delta \omega}{\|\Delta \omega\|} = \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \quad (4.280)$$

gelten. Man kann dies in den Fallunterscheidungen oben einarbeiten und erhält

$$S_n (1 - S_R) \left( \Lambda_c - \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.281)$$

Es ist hilfreich, (4.270)–(4.274) in Form von

$$S_n S_R h_R \Delta \omega = \mathbf{0}. \quad (4.282)$$

anzugeben. Schließlich lassen sich die Gleichungen (4.269), (4.281) und (4.282) bezüglich  $\gamma^s$  in einer Gleichung zusammenfassen:

$$(1 - S_n) \Lambda_c + S_n \left( (1 - S_R) \Lambda_c - S_R h_R \Delta \omega - (1 - S_R) \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.283)$$

Es bleibt zu zeigen, dass aus dieser Gleichung das Reibungsgesetz in der Form (4.234) und (4.235) folgt. Man betrachtet dafür zuerst

$$S_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_c = \mathbf{0}, \quad (4.284)$$

was unabhängig von  $\Delta \omega$  gilt. Für den Fall  $S_n = 1$  folgert man weiterhin

$$\begin{aligned} S_R = 0 & \Rightarrow \|\mathbf{g}_R\| = \|\Lambda_c + \rho_R \Delta \omega\| \geq 1 \text{ und } \|\Lambda_c\| = 1 \\ & \Rightarrow 1 \leq \|\Lambda_c + \rho_R \Delta \omega\| \leq \|\Lambda_c\| + \rho_R \|\Delta \omega\| \\ & \Rightarrow \|\Delta \omega\| \geq 0 \\ & \Rightarrow \text{Grenzhaft- oder Reibrotation,} \end{aligned} \quad (4.285)$$

wobei in der zweiten Zeile die Dreiecksungleichung verwendet wurde. Wiederum mit  $S_n = 1$  betrachtet man letztendlich:

$$\begin{aligned} S_R = 1 & \Rightarrow \|\mathbf{g}_R\| = \|\Lambda_c + \rho_R \Delta \omega\| < 1 \text{ und } h_R \Delta \omega = \mathbf{0}, \\ & \Rightarrow \Delta \omega = \mathbf{0} \text{ und } \|\Lambda_c\| < 1 \\ & \Rightarrow \text{Haftrotation.} \end{aligned} \quad (4.286)$$

Es lassen sich also aus Gleichung (4.283) die Bedingungen (4.234) und (4.235) zurückgewinnen.

Wie im Fall der tangentialen Spannungsvektoren wird auch für die Momentenspannungsvektoren auf  $\gamma^s$  eine Formulierung in Verbindung mit dem Vektor  $\Lambda_c$  hergeleitet. Man beginnt wieder bei (4.237):

$$\mathbf{t}_c^s = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{für } g > 0, \\ \eta_c \check{\Lambda}_c, & \text{für } g = 0. \end{cases} \quad (4.287)$$

Diese Materialgleichung kann mit Hilfe von (4.158) auch anhand von

$$\mathbf{t}_c^s = S_n \eta_c \check{\Lambda}_c \quad (4.288)$$



geschrieben werden. Weiterhin gilt für  $\Lambda_c$  bei Kontakt

$$\Lambda_c = \begin{cases} \Lambda_c, & S_R = 1, \\ \frac{\Lambda_c}{\|\Lambda_c\|}, & S_R = 0 \end{cases} \quad (4.289)$$

oder mit (4.280) auch

$$\Lambda_c = \begin{cases} \Lambda_c, & S_R = 1, \\ \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|}, & S_R = 0. \end{cases} \quad (4.290)$$

Der Vektor  $\Lambda_c$  lässt sich also durch

$$\Lambda_c = S_R \Lambda_c + (1 - S_R) \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|}, \quad (4.291)$$

darstellen, so dass sich schließlich das Materialgesetz für den Koppelspannungsvektor in der Form

$$\mathbf{t}_c^s = S_n \left( S_R \eta_c \check{\mathbf{p}} \Lambda_c + (1 - S_R) \eta_c \check{\mathbf{p}} \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \right) \quad (4.292)$$

bezüglich  $\gamma^s$  ergibt.

#### 4.4.1 Funktionale des Kontaktmodells, Schwache Formen

Es wird zu den Gesamtfunktionalen (4.18) und (4.19) zurückgekehrt und zunächst die Integrale über den gesamten Kontaktrand betrachtet. Führt man Variationen auf den *master*- und *slave*-Kontaktflächen  $\delta \mathbf{u}^s$ ,  $\delta \mathbf{u}^m$ , und  $\delta \mathbf{m}^s$ ,  $\delta \mathbf{m}^m$  ein, so erhält man:

$$\int_{\gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da = \int_{\gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot \delta \mathbf{u}^s \, da^s + \int_{\gamma^m} \mathbf{t}^m \cdot \delta \mathbf{u}^m \, da^m, \quad (4.293)$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{t}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, da = \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot \delta \mathbf{m}^s \, da^s + \int_{\gamma^m} \mathbf{t}_c^m \cdot \delta \mathbf{m}^m \, da^m, \quad (4.294)$$

wobei in inaktiven Bereichen der Kontaktfläche definitionsgemäß  $\mathbf{t}^s = \mathbf{t}^m = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{t}_c^s = \mathbf{t}_c^m = \mathbf{0}$  gilt. In aktiven Bereichen können die Variationen der Vektoren bezüglich der *master*-Fläche jeweils anhand von

$$\delta \mathbf{u}^m = \delta \check{\mathbf{u}}^m, \quad (4.295)$$

$$\delta \mathbf{m}^m = \delta \check{\mathbf{m}}, \quad (4.296)$$

ausgedrückt werden. Die Größen  $\delta \check{\mathbf{u}}^m$  und  $\delta \check{\mathbf{m}}$  bezeichnen Variationen an Projektionspunkten  $\check{\mathbf{x}}$ . Wird zudem von den Beziehungen (3.39) und (3.40) für die Spannungstensoren Gebrauch gemacht, dann lassen sich (4.293) und (4.294) bezüglich der *slave*-Fläche ausdrücken:

$$\int_{\gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da = \int_{\gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot (\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m) \, da^s, \quad (4.297)$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{t}_c \cdot \delta \mathbf{m} \, da = \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot (\delta \mathbf{m}^s - \delta \check{\mathbf{m}}) \, da^s. \quad (4.298)$$

Im Fall des klassischen Kontakttrandes ist es sinnvoll, die Variationsdifferenz in Normal- und Tangentialanteile zu zerlegen:

$$\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m = \check{\mathbf{n}} (\check{\mathbf{n}} \cdot (\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m)) + (1 - \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}) [\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m], \quad (4.299)$$

vergleiche auch (2.121). Unter Berücksichtigung der Analogie zwischen Zeitableitung und Variation (siehe SCHERF [69] S. 73) erhält man aus (2.130) die Variation der Abstandsfunktion

$$\delta g = \check{\mathbf{n}} \cdot (\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m). \quad (4.300)$$

Auf der Grundlage von Gleichung (2.132) führt man die Variation einer tangentialen Differenzverschiebung ein:

$$\delta \mathbf{u}_\tau = (1 - \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}) [\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m]. \quad (4.301)$$

Das variationelle Analogon von Gleichung (2.133) lautet jetzt mit (4.299)

$$\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m = \delta g \check{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{u}_\tau. \quad (4.302)$$

Für die Differenzrotation definiert man wiederum unter Berücksichtigung der Analogie zwischen Zeitableitung der Mikrorotation (mikropolarer Spintensor) und Variation des axialen Vektors  $\mathbf{m}$  in Verbindung mit (2.155) und (4.16):

$$\delta \bar{\mathbf{m}} := \delta \mathbf{m}^s - \delta \check{\mathbf{m}}. \quad (4.303)$$

Für eine Diskussion der Variation der mikropolaren Rotationsvektoren siehe GRAMMENOU DIS und TSAKMAKIS [29]. Mit den oben eingeführten Variationsgrößen und der Zerlegung des Spannungsvektors (3.49) erhält man für die Integrale (4.297) und (4.298)

$$\int_\gamma \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} da = - \int_{\gamma^s} \check{p} \delta g da^s + \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{u}_\tau da^s, \quad (4.304)$$

$$\int_\gamma \mathbf{t}_c \cdot \delta \mathbf{m} da = \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} da^s. \quad (4.305)$$

Durch Einsetzen dieser Integrale in die Gesamtfunktionale (4.18) und (4.19) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \delta \mathbf{u} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}} \mathbf{t}^0 \cdot \delta \mathbf{u} da}_{\mathcal{F}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\gamma^s} \check{p} \delta g da^s}_{\mathcal{G}_p} - \underbrace{\int_{\gamma^s} \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{u}_\tau da^s}_{\mathcal{G}_T}, \end{aligned} \quad (4.306)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c &= \mathcal{F}_c(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \delta \mathbf{m} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{M} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{m} dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c}} \mathbf{t}_c^0 \cdot \delta \mathbf{m} da}_{\mathcal{F}_c} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} da^s}_{\mathcal{G}_R}, \end{aligned} \quad (4.307)$$

wobei  $\overline{\mathcal{F}}_c$  und  $\overline{\mathcal{F}}_c$  anhand von (4.22) und (4.23) bereits eingeführt wurden. Die Funktionalanteile für Normalkontakt  $\mathcal{G}_p$ , klassischen Tangentialkontakt  $\mathcal{G}_T$  und Rotationskontakt  $\mathcal{G}_R$  sind nun definiert durch

$$\mathcal{G}_p := \int_{\gamma^s} \check{p} \delta g da^s, \quad (4.308)$$

$$\mathcal{G}_T := - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{u}_\tau da^s, \quad (4.309)$$

$$\mathcal{G}_R := - \int_{\gamma^s} \mathbf{t}_c^s \cdot \delta \tilde{\mathbf{m}} da^s. \quad (4.310)$$

Zusammen mit den Definitionen (4.22) und (4.23) erhält man für die Gesamtfunktionale

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} + \mathcal{G}_p + \mathcal{G}_T = 0, \quad (4.311)$$

$$\mathcal{F}_c = \overline{\mathcal{F}}_c + \mathcal{G}_R = 0. \quad (4.312)$$

Nun ersetzt man in (4.308)–(4.310) den Druck, den tangentialen Spannungsvektor und den Koppelspannungsvektor durch die Materialgleichungen (4.170), (4.233) und (4.292):

$$\mathcal{G}_p = \int_{\gamma^s} S_n \check{p} \delta g da^s, \quad (4.313)$$

$$\mathcal{G}_T = - \int_{\gamma^s} S_n \left( S_T \eta \check{p} \boldsymbol{\Lambda} + (1 - S_T) \eta \check{p} \frac{\boldsymbol{\Lambda} + h_T \mathbf{v}_T}{\|\boldsymbol{\Lambda} + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) \cdot \delta \mathbf{u}_\tau da^s, \quad (4.314)$$

$$\mathcal{G}_R = - \int_{\gamma^s} S_n \left( S_R \eta_c \check{p} \boldsymbol{\Lambda}_c + (1 - S_R) \eta_c \check{p} \frac{\boldsymbol{\Lambda}_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\Lambda}_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}\|} \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{m}} da^s. \quad (4.315)$$

Bezüglich der Referenzkonfiguration  $\Gamma^s$  erhält man daraus:

$$\mathcal{G}_p = \int_{\Gamma^s} S_n p \delta g dA^s, \quad (4.316)$$

$$\mathcal{G}_T = - \int_{\Gamma^s} S_n \left( S_T \eta p \boldsymbol{\Lambda} + (1 - S_T) \eta p \frac{\boldsymbol{\Lambda} + h_T \mathbf{v}_T}{\|\boldsymbol{\Lambda} + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s, \quad (4.317)$$

$$\mathcal{G}_R = - \int_{\Gamma^s} S_n \left( S_R \eta_c p \boldsymbol{\Lambda}_c + (1 - S_R) \eta_c p \frac{\boldsymbol{\Lambda}_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\Lambda}_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}\|} \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{m}} dA^s. \quad (4.318)$$

Die Gleichungen für Normalkontakt, Tangentialkontakt und Rotationskontakt sind jeweils den Bedingungen (4.165), (4.224) und (4.283) unterworfen. Um auf eine gemischte Variationsformulierung zu gelangen, werden der Druck  $p$  und die Vektoren  $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_c$  als neue Variablen betrachtet. Damit ergeben sich  $\mathcal{G}_p$ ,  $\mathcal{G}_T$  und  $\mathcal{G}_R$  als Funktionale von  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $p$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_c$ ,  $\delta \mathbf{u}$  und  $\delta \mathbf{m}$ :

$$\mathcal{G}_p = \mathcal{G}_p(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}), \quad (4.319)$$

$$\mathcal{G}_T = \mathcal{G}_T(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\Lambda}, \delta \mathbf{u}), \quad (4.320)$$

$$\mathcal{G}_R = \mathcal{G}_R(\mathbf{u}, \mathbf{m}, p, \boldsymbol{\Lambda}_c, \delta \mathbf{m}). \quad (4.321)$$

und daher

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{m}, p, \Lambda, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}). \quad (4.322)$$

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbf{u}, \mathbf{m}, p, \Lambda_c, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}). \quad (4.323)$$

Im Hinblick auf die Bildung schwacher Formen der Nebenbedingungen ist es sinnvoll, die Bedingungen (4.165), (4.224) und (4.283) jeweils mit den Variationen  $h_n^{-1} \delta p$ ,  $\eta p h_T^{-1} \delta \Lambda$  und  $\eta_c p h_R^{-1} \delta \Lambda_c$  skalar zu multiplizieren, so dass

$$\frac{1}{h_n} (p - S_n (p + h_n g)) \delta p = 0, \quad (4.324)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_T} (1 - S_n) \eta p \Lambda \cdot \delta \Lambda \\ & + \frac{1}{h_T} S_n \eta p \left( (1 - S_T) \Lambda - S_T h_T \mathbf{v}_T - (1 - S_T) \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) \cdot \delta \Lambda = 0, \end{aligned} \quad (4.325)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_R} (1 - S_n) \eta_c p \Lambda_c \cdot \delta \Lambda_c \\ & + \frac{1}{h_R} S_n \eta_c p \left( (1 - S_R) \Lambda_c - S_R h_R \Delta \omega - (1 - S_R) \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \right) \cdot \delta \Lambda_c = 0. \end{aligned} \quad (4.326)$$

Nach Integration dieser Gleichungen definiert man die Funktionale der Nebenbedingungen mit

$$\mathcal{H}_p(\mathbf{u}, p, \delta p) := - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_n} (p - S_n (p + h_n g)) \delta p dA^s = 0, \quad (4.327)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T(\mathbf{u}, p, \Lambda, \delta \Lambda) &:= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} (1 - S_n) \eta p \Lambda \cdot \delta \Lambda dA^s \\ &+ \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} S_n \eta p \left( (1 - S_T) \Lambda - S_T h_T \mathbf{v}_T \right. \\ &\quad \left. - (1 - S_T) \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) \cdot \delta \Lambda dA^s = 0, \end{aligned} \quad (4.328)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R(\mathbf{u}, \mathbf{m}, p, \Lambda_c, \delta \Lambda_c) &:= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} (1 - S_n) \eta_c p \Lambda_c \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\ &+ \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} S_n \eta_c p \left( (1 - S_R) \Lambda_c - S_R h_R \Delta \omega \right. \\ &\quad \left. - (1 - S_R) \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \right) \cdot \delta \Lambda_c dA^s = 0. \end{aligned} \quad (4.329)$$

Die Funktionale der schwachen Formen für die Gleichgewichts- und Kontaktbedingungen können nun zusammengefasst werden:

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} + \mathcal{G}_p + \mathcal{G}_T = 0, \quad (4.330)$$

$$\mathcal{F}_c = \overline{\mathcal{F}}_c + \mathcal{G}_R = 0, \quad (4.331)$$

$$\mathcal{H}_p = 0, \quad (4.332)$$

$$\mathcal{H}_T = 0, \quad (4.333)$$

$$\mathcal{H}_R = 0. \quad (4.334)$$

---

## Stabilisierungsverfahren

---

Im Hinblick auf das eingesetzte inkrementelle Lösungsverfahren sei erwähnt, dass im Fall von Kontakt die Bedingung  $g = 0$  nicht exakt erfüllt werden kann. Eine ähnliche Situation existiert bezüglich der Fälle Haftung und Haftrotation. Hier lassen sich die Bedingungen  $\mathbf{v}_T = \mathbf{0}$  und  $\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  numerisch nicht exakt erfüllen. In den genannten Fällen kann das Gesamtfunktional durch Stabilisierungsterme erweitert werden. Dazu wird in Analogie zu ABBAS [2] angesetzt:

$$\mathcal{J}_p(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) := \int_{\Gamma^s} S_n \kappa_n g \delta g dA^s, \quad (\text{für Kontakt}), \quad (4.335)$$

$$\mathcal{J}_T(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \delta \mathbf{u}) := - \int_{\Gamma^s} S_n S_T \kappa_T \eta \mathbf{p} \mathbf{v}_T \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s, \quad (\text{für Haftung}), \quad (4.336)$$

$$\mathcal{J}_R(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \delta \mathbf{m}) := - \int_{\Gamma^s} S_n S_R \kappa_R \eta_c \mathbf{p} \Delta \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \quad (\text{für Haftrotation}), \quad (4.337)$$

wobei  $\kappa_n$ ,  $\kappa_T$  und  $\kappa_R$  reelle nicht negative Parameter sind, die geeignet gewählt werden müssen. Schließlich stehen alle Integralterme zur Lösung des Kontaktproblems fest:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \overline{\mathcal{F}} + \mathcal{G}_p + \mathcal{G}_T + \mathcal{J}_p + \mathcal{J}_T = 0, \\ \mathcal{F}_c &= \overline{\mathcal{F}}_c + \mathcal{G}_R + \mathcal{J}_c = 0, \\ \mathcal{H}_p &= 0, \\ \mathcal{H}_T &= 0, \\ \mathcal{H}_R &= 0. \end{aligned} \quad (4.338)$$

---

### 4.4.2 Nichtlineare Kontaktbedingungen, Fixpunktverfahren

---

Bei dem vorliegenden Kontaktproblem unter Berücksichtigung von Plastizität ist aufgrund geometrischer und materieller Nichtlinearitäten der Einsatz von iterativen Lösungsverfahren zwingend notwendig. Insgesamt werden für eine vollständige Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme die folgenden Iterationsverfahren verwendet, siehe Bild 4.3. In dieser Aufstellung sind jeweils die Feldgrößen mit angegeben, so wie sie am Ende der einzelnen Iterationsverfahren als (vorläufige) Lösungen bereitstehen.

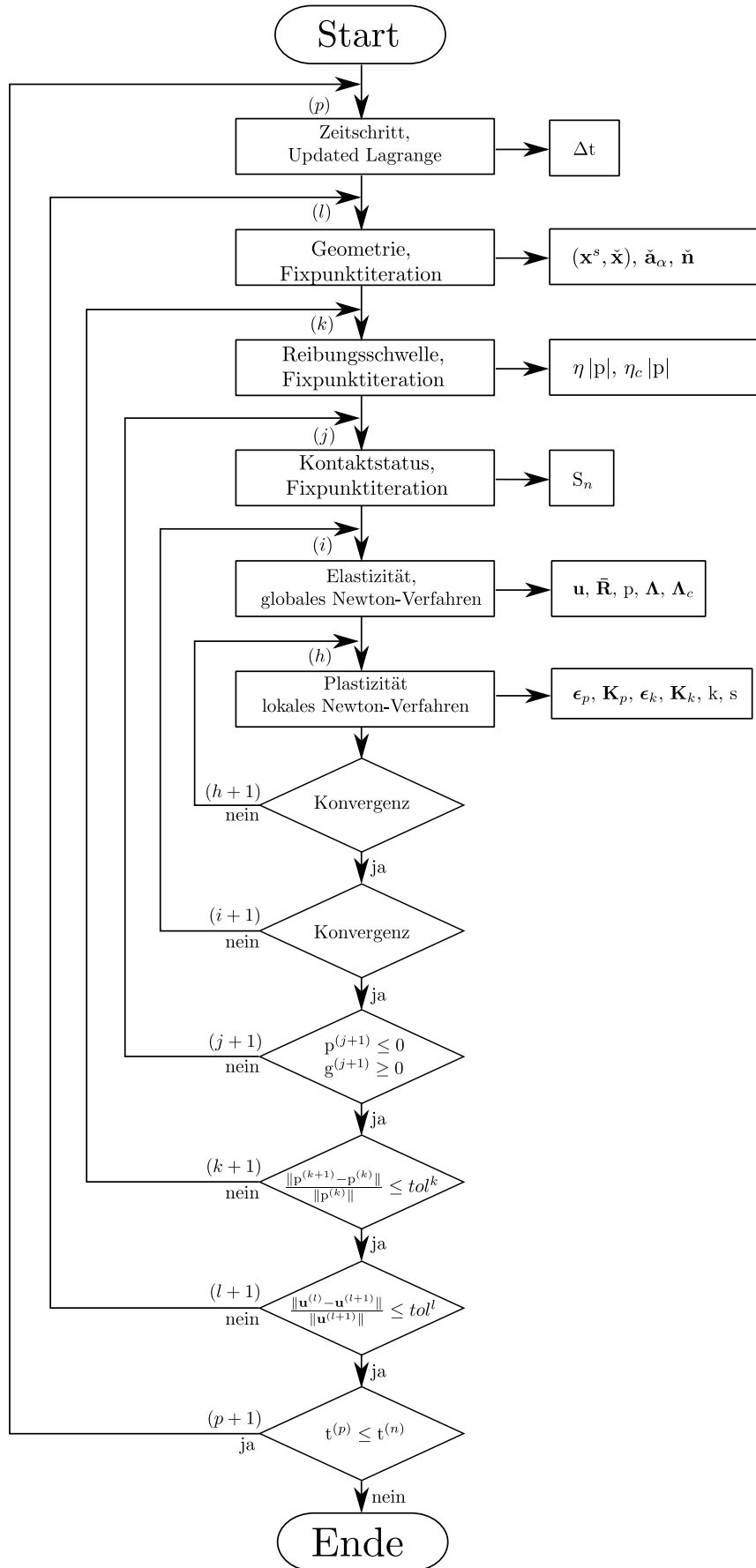
---

#### Zeitschritt ( $p$ )

---

Insbesondere ist die Materialantwort der hier verwendeten Materialmodelle im Körpervolumen und in der Kontaktfläche geschichtsabhängig. Unter dieser Voraussetzung kann eine Lösung der mikropolaren Bilanzgleichungen (siehe Abschnitt 4.3.2) und Kontaktbedingungen nur mit einer zeitlichen Diskretisierung erfolgen. Die äußeren Belastungen der Randwertaufgabe werden dabei inkrementell aufgebracht. Die Schleife über die Zeitschritte stellt das äußerste Iterationsverfahren des gesamten Lösungsverfahrens dar. Die Zeitschrittsschleife durchläuft die zuvor festgelegte Anzahl  $n$  von Zeitschritten. Dabei gilt

$$\mathbf{t}^{(p+1)} = \mathbf{t}^{(p)} + \Delta \mathbf{t}, \quad (4.339)$$



**Abbildung 4.3:** Programmablaufplan einer Kontaktsimulation in Zusammenhang mit plastischen Materialien.

mit  $p = 0, \dots, (n - 1)$  und

$$0 = t^{(0)} < t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(n)}, \quad (4.340)$$

wobei  $t^{(n)}$  den Endzeitpunkt bezeichnet und  $\Delta t$  ein zeitliches Inkrement darstellt. Man sucht nun die Lösung der Feldgrößen zum Zeitpunkt  $t^{(p+1)}$ , indem man von den bekannten Größen des vorherigen Zeitpunktes  $t^{(p)}$  ausgeht. Um die Notation zu vereinfachen, wird im Folgenden für  $t^{(p)}$  einfach  $t$  geschrieben.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_T$  werden die Verschiebungen im Zeitinkrement linear interpoliert. Man führt eine Zeit  $\zeta$  des aktuellen Zeitinkrementes ein, wobei

$$t \leq \zeta \leq t + \Delta t \quad (4.341)$$

gilt. Mit einer Größe  $\xi$ ,

$$\xi := \frac{\zeta - t}{\Delta t}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (4.342)$$

folgt für die Verschiebung im Inkrement:

$$\mathbf{u}_\zeta = (1 - \xi) \mathbf{u}_t + \xi \mathbf{u}_{t+\Delta t}. \quad (4.343)$$

Die Geschwindigkeit ist damit durch

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_\zeta}{d\zeta} &= \frac{d}{d\zeta} \left( \left( 1 - \frac{\zeta - t}{\Delta t} \right) \mathbf{u}_t + \frac{\zeta - t}{\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} \right), \\ &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) \end{aligned} \quad (4.344)$$

gegeben. Man führt zeitliche Inkremente

$$\Delta_{\Delta t} \mathbf{u}^s := \mathbf{u}_{t+\Delta t}^s - \mathbf{u}_t^s \quad (4.345)$$

$$\Delta_{\Delta t} \check{\mathbf{u}}^m := \check{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^m - \check{\mathbf{u}}_t^m \quad (4.346)$$

ein, siehe auch (4.33). Mit diesen Definitionen ist die Tangentialgeschwindigkeit bei Berührung und Kontakt (d.h. es gilt  $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_\tau$ ) gegeben durch die Vorwärtsdifferenzenformel

$$\mathbf{v}_T = (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}} \otimes \check{\mathbf{n}}) \frac{1}{\Delta t} [\Delta_{\Delta t} \mathbf{u}^s - \Delta_{\Delta t} \check{\mathbf{u}}^m], \quad (4.347)$$

siehe (2.132). Überlegungen im Zusammenhang mit der sogenannten inkrementellen Objektivität, siehe HUGHES und WINGET [40], JAHNSON [42] und LÄMMER [57] erlauben den Spintensor  $\boldsymbol{\Omega}$  wie folgt zu interpolieren:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{2}{\Delta t} \left( (\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}) - \mathbf{1} \right) \left( (\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}) + \mathbf{1} \right)^{-1}. \quad (4.348)$$

Mit diesem Ausdruck für den zeitlich diskretisierten Spintensor ist der axiale Vektor des Differenzspins (2.156) durch

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\omega} &= \text{axl} \left( \overset{\Delta}{\mathbf{G}} \right) \\ &= \text{axl} \left( \boldsymbol{\Omega}^s - \check{\boldsymbol{\Omega}} \right) \\ &= \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left( \left( \Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} - \left( \Delta_{\Delta t} \check{\mathbf{R}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right)\end{aligned}\quad (4.349)$$

gegeben, wobei die zeitlichen Rotationsinkremente der Kontaktflächen definiert sind als

$$\Delta_{\Delta t} \bar{\mathbf{R}}^s := \bar{\mathbf{R}}_{t+\Delta t}^s \left( \bar{\mathbf{R}}_t^s \right)^T, \quad (4.350)$$

$$\Delta_{\Delta t} \check{\mathbf{R}} := \check{\mathbf{R}}_{t+\Delta t} \check{\mathbf{R}}_t^T. \quad (4.351)$$

---

### Geometrie ( $l$ )

---

Zu Beginn jedes neuen Zeitschritts sind die Paare von Kontaktpunkten  $(\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})_{t+\Delta t}$  noch unbekannt. Die Bestimmung dieser Punktpaare ist von der Lösung der Gleichgewichtslage  $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$  abhängig, was auf ein nicht-lineares Problem führt. Eine Möglichkeit zur Lösung stellen Fixpunktiterationen dar (zur Darstellung von Fixpunktiterationen siehe KNABNER und ANGERMANN [47] S. 271). In *Code\_Aster* wird dieses Verfahren als Fixpunktiterationen der Geometrie bezeichnet, siehe ABBAS [2]. Zu einem festen Zeitpunkt  $t$  und bezüglich eines unabhängigen Punktes  $\mathbf{x}^s$  sind die Geometrieiterationen durch die Vorschrift

$$(\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})^{(l+1)} := f^l \left( (\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})^{(l)} \right) \quad (4.352)$$

gegeben (siehe ABBAS [2]), wobei ( $l$ ) den Index der Geometrieiterationen bezeichnet.  $f^l$  stellt dabei eine Abbildung (auch Iterationsverfahren) dar, die in allen inneren Schleifen ( $k$ ), ( $j$ ), ( $i$ ) und ( $h$ ) der aktuellen Geometrieiteration gebildet wird. Die Tangentenvektoren und die Normale hängen von dem Projektionspunkt ab, so dass

$$\check{\mathbf{a}}_\alpha^{(l)} = \check{\mathbf{a}}_\alpha \left( \check{\mathbf{X}}^{(l)} + (\check{\mathbf{u}}^m)^{(l)} \right), \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.353)$$

$$\check{\mathbf{n}}^{(l)} = \check{\mathbf{n}} \left( \check{\mathbf{X}}^{(l)} + (\check{\mathbf{u}}^m)^{(l)} \right), \quad (4.354)$$

gilt. Innerhalb der Geometrieiteration werden die Normale  $\check{\mathbf{n}}$  und die Tangentenvektoren  $\check{\mathbf{a}}_\alpha$  demnach festgehalten. Nach einem Durchlauf der Schleifen ( $k$ ) bis ( $h$ ) kann (4.352) ausgewertet und neue Punktpaare ermittelt werden. Das Konvergenzkriterium ist durch

$$\frac{\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}^{(l+1)}\|}{\|\mathbf{u}^{(l+1)}\|} \leq \text{tol}^l \quad (4.355)$$

festgelegt, siehe ABBAS [2]. Wenn die Norm der Verschiebungsänderungen relativ zu der Norm der Verschiebungen aus der letzten Geometrieiteration einen festgelegten Grenzwert  $\text{tol}^l$  unterschreitet, dann stehen die Paare von Kontaktpunkten  $(\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})$  für den betrachteten Zeitschritt fest.



---

## Reibungsschwelle ( $k$ )

---

Die Bestimmung der Reibungsschwellen  $\eta |p|$  und  $\eta_c |p|$  der COULOMB'schen Gesetze ist abhängig vom aktuellen Kontaktdruck. Der Druck  $p_{t+\Delta t}$  ist zu Beginn eines Zeitschrittes jedoch nicht bekannt und damit stehen auch die Reibungsschwellen zur Bestimmung des Grenzhaftekriteriums noch nicht fest. Der Kontaktdruck ist von der Lösung der Gleichgewichtsbedingungen abhängig. Aus diesem Grund müssen die Reibungsschwellen iterativ bestimmt werden. Die Vorschrift der Fixpunktiteration der Reibungsschwelle bzw. das Reibkriterium bei tangentialen Relativverschiebungen  $\eta |p|$  und relativen Rotationen  $\eta_c |p|$  ist unter Berücksichtigung konstanter Reibkoeffizienten  $\eta$  und  $\eta_c$  durch

$$p^{(k+1)} := f^k(p^{(k)}) \quad (4.356)$$

definiert, wobei die Abbildung  $f^k$  in allen inneren Schleifen ( $j$ ), ( $i$ ) und ( $h$ ) gebildet wird. Bei generalisierter COULOMB'scher Reibung erhält man damit die festgehaltenen Haftgrenzen für klassischen tangentialen und rotatorischen Kontakt:

$$\eta |p^{(k)}| \quad \text{und} \quad \eta_c |p^{(k)}|. \quad (4.357)$$

Das Konvergenzkriterium kann hierbei mit Kenntnis des Kontaktdrucks überprüft werden,

$$\frac{\|p^{(k+1)} - p^{(k)}\|}{\|p^{(k)}\|} \leq tol^k, \quad (4.358)$$

wobei  $tol^k$  eine konstante Abbruchtoleranz bezeichnet.

---

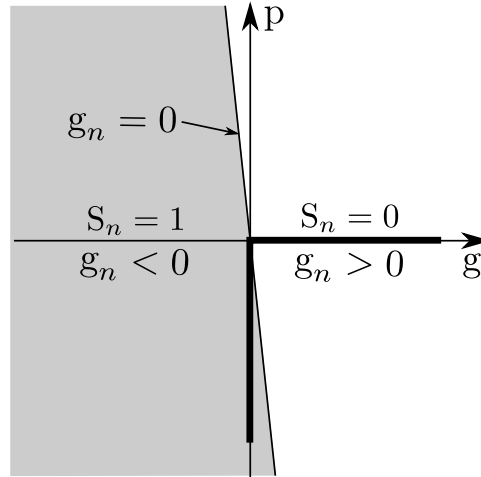
## Kontaktstatus ( $j$ )

---

Die Bestimmung des Normalkontaktstatus (Kontakt bzw. Nicht-Kontakt oder Berührung) ist in ABBAS [2] und [3] im Detail beschrieben. Die Besonderheit des verwendeten Verfahrens (*la méthode des contraintes actives*) ist, dass die Bestimmung des Kontaktstatus von dem NEWTON-Verfahren abgekoppelt wird. Prinzipiell werden die Startwerte jeder Iteration aus der Kenntnis der effektiven (aktiven) und nicht-effektiven (inaktiven) Kontaktzonen,  $\Gamma_{eff}^s$  und  $\bar{\Gamma}_{eff}^s$  der letzten Iteration ( $j$ ) ermittelt. Vorläufig setzt man demnach in jeder Iteration effektive Kontaktzonen voraus (*active-set-Strategie*, siehe DUMONT [20]), so dass für jedes Punktpaar ein Statuswert feststeht  $S_n^{(j)}$ . Die Methode zur Bestimmung von  $S_n^{(j+1)}$  wird im Folgenden erläutert.

Grundsätzlich muss für eine Berechnung von  $S_n^{(j+1)}$  der aktuelle Druck und Abstand bekannt sein, siehe (4.156) und (4.158). Der Kontaktdruck  $p^{(j+1)}$  und der Abstand  $g^{(j+1)}$  ergeben sich aus der vorläufigen Verschiebungs- und Drucklösung des globalen NEWTON-Verfahrens. Hierbei ist es möglich, dass die Bedingungen (4.155) aufgrund von  $p^{(j+1)} > 0$  oder  $g^{(j+1)} < 0$  nicht exakt erfüllt sind. In diesen Fällen lässt sich in Abhängigkeit von dem regularisierten Multiplikator  $g_n^{(j+1)}$ , vgl (4.156)–(4.158), über

$$S_n = I_0 (p^{(j+1)} + \rho_n g^{(j+1)}), \quad (4.359)$$



**Abbildung 4.4:** Normalkontaktgesetz mit Regularisierung. Das exakte Normalkontaktgesetz ist durch die dicke Linie gekennzeichnet.

jedem Punktpaar mit den unzulässigen Kontaktbedingungen trotzdem ein Normalkontaktstatus zuweisen, siehe Bild 4.4. Der Regularisierungsparameter  $\rho_n$  gibt dabei die negative Steigung der im Bild 4.4 angegebenen Geraden  $p(g) = -\rho_n g + g_n$  für  $g_n = 0$  an. Der Definition (4.156) entnimmt man, dass für alle  $g_n < 0$  der Kontaktfall mit  $S_n = 1$  vorliegt. Im Bild 4.4 ist dieser Bereich grau unterlegt. Beispielsweise kann ein negativer Kontaktdruck zusammen mit einem kleinen positiven Abstand der Kontaktpunkte noch als Kontakt interpretiert werden, da Druck und Abstand einen Punkt im grauen Bereich markieren.

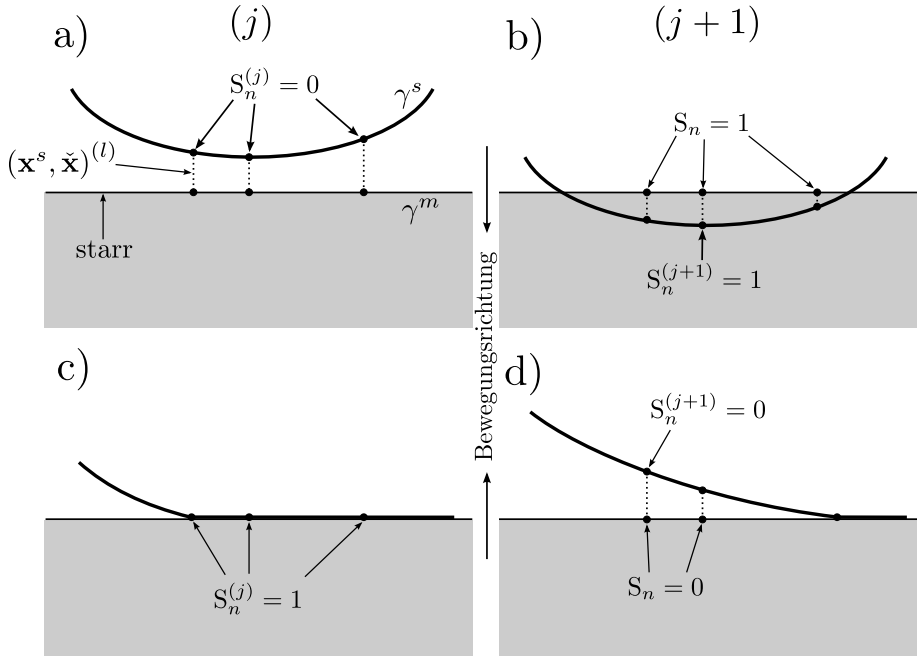
Wenn  $g_n \geq 0$  gilt, folgt  $S_n = 0$ . Für das betrachtete Punktpaar gilt damit Berührung oder kein Kontakt. Diese Kontaktzustände sind in Bild 4.4 durch die Gerade  $g_n = 0$  bzw. den weiß unterlegten Bereich verdeutlicht. Hierbei führt die Regularisierung dazu, dass kleine Durchdringungen als kein Kontakt gewertete werden können, wenn eine ausreichende Zugspannung zwischen den Kontaktpunkten herrscht. Diese Situation entspricht in Bild 4.4 einem Punkt im weißen Bereich mit positivem Druck und negativem Abstand.

Von einer Statusbestimmung gemäß (4.359) abweichend, wird in *Code\_Aster* die Bestimmung des Normalkontaktstatus wie im Folgenden erläutert, durchgeführt (siehe Bild 4.5). In den Teilbildern ist der *slave*-Körper, bzw. sein Kontaktbereich jeweils durch die obere gekrümmte Linie angedeutet. Ein Ausschnitt des *master*-Körpers mit einer ebenen Kontaktfläche befindet sich unterhalb des *slave*-Körpers. Oberflächenpunkte, die über die Projektionsvorschrift (2.111) als potentielle Kontaktpaare ermittelt wurden, sind über eine gestrichelte Linie miteinander verbunden. Die beiden linken Teilbilder a) und c) geben den Zustand der letzten Iteration ( $j$ ) wieder, während die beiden Darstellungen b) und d) auf der rechten Seite einen möglichen Zustand ( $j + 1$ ) nach Durchlaufen der inneren Schleifen ( $i$ ) und ( $h$ ) wiedergeben.

- An allen Punktpaaren, an denen ein vorläufiger Kontaktzustand  $S_n^{(j)} = 0$  gilt (siehe Bild 4.5,a) oben links), d.h. an allen Punktpaaren  $(\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})^{(l)}$  des vorläufig inaktiven Bereichs  $(\bar{\Gamma}_{eff}^s)^{(j)}$ , wird anstatt (4.359) der Wert

$$S_n = I_0 \left( g^{(j+1)} \right) \quad (4.360)$$

gebildet, wobei sich der Abstand  $g^{(j+1)}$  aus der Verschiebungslösung des globalen NEWTON-Verfahrens ergibt. Zunächst werden die Punktpaare des Bereichs  $(\bar{\Gamma}_{eff}^s)^{(j)}$  ermittelt, an



**Abbildung 4.5:** Bestimmung des Normalkontaktstatus.

denen sich der Normalkontaktzustand geändert hat (d.h.  $S_n = I_0(g^{(j+1)}) = 1$ , siehe Bild 4.5,b) oben rechts). In der Menge dieser Punktpaare wird anschließend das Punktpaar gesucht, bei dem der Abstand  $g^{(j+1)} < 0$  am kleinsten ist. Für dieses Paar wird dann der neue Wert  $S_n^{(j+1)} = 1$  gesetzt. An allen anderen Punktpaaren des vorläufig inaktiven Bereichs bleibt der Kontaktstatus unverändert, d.h.  $S_n^{(j+1)} = S_n^{(j)} = 0$ . Im Bild 4.5 ist dies ebenfalls oben rechts dargestellt.

- An allen Punktpaaren mit einem vorläufige Kontaktzustand von  $S_n^{(j)} = 1$  (siehe Bild 4.5,c unten links), d.h. alle Punktpaare  $(\mathbf{x}^s, \check{\mathbf{x}})^{(l)}$  des vorläufig aktiven Bereichs  $(\Gamma_{eff}^s)^{(l)}$ , wird anstatt (4.359) der Wert

$$S_n = I_0(p^{(j+1)}) \quad (4.361)$$

berechnet, wobei sich der Kontaktdruck  $p^{(j+1)}$  aus der Lösung des globalen NEWTON-Verfahrens ergibt. Anschließend wird eine Untermenge aus den Punktpaaren des Bereichs  $(\Gamma_{eff}^s)^{(l)}$  gebildet, an denen sich der Normalkontaktzustand geändert hat (d.h.  $S_n = S_n(p^{(j+1)}) = 0$ , siehe Bild 4.5,d) unten rechts). In dieser Menge wird dann das Paar gesucht, bei dem der Druck  $p^{(j+1)} > 0$  am größten ist. Für dieses Paar wird dann der neue Wert  $S_n^{(j+1)} = 0$  gesetzt, in Bild 4.5 unten rechts. An allen anderen Punktpaaren des vorläufig aktiven Bereichs gilt weiterhin  $S_n^{(j+1)} = S_n^{(j)} = 1$ .

Bei dieser Vorgehensweise hat der Parameter  $\rho_n$  keinen Einfluss auf die Lösung des Verfahrens. Die Konvergenz ist erreicht, wenn die geometrische Kontaktbedingung  $g \geq 0$  und die Druckbedingung  $p \leq 0$  an allen Punktpaaren eingehalten ist.

Aus der Fixpunktiteration (j) folgt, dass  $S_n$  durch  $S_n^{(j)}$  ersetzt werden kann. Die Funktionale (4.316), (4.327) und (4.335) sind damit näherungsweise durch

$$\mathcal{G}_p(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma^s} S_n^{(j)} p \delta g dA^s, \quad (4.362)$$

$$\mathcal{H}_p(\mathbf{u}, p, \delta p) = - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_n} \left( p - S_n^{(j)} (p + h_n g) \right) \delta p dA^s = 0, \quad (4.363)$$

$$\mathcal{J}_p(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma^s} S_n^{(j)} \kappa_n g \delta g dA^s \quad (4.364)$$

gegeben. Berücksichtigt man zudem die Fixpunktiterationen (k), dann können die Haftungs-  
grenzen der COULOMB'schen Reibung  $\eta p$  durch entsprechende Ausdrücke mit festgehaltenem  
Kontaktdruck  $p^{(k)}$  ersetzt werden. Im Fall der Funktionale (4.317), (4.328) und (4.336) erhält  
man somit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_T(\mathbf{u}, \Lambda, \delta \mathbf{u}) = & - \int_{\Gamma^s} S_n^{(j)} \left( S_T \eta p^{(k)} \Lambda \right. \\ & \left. + (1 - S_T) \eta p^{(k)} \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s, \end{aligned} \quad (4.365)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T(\mathbf{u}, \Lambda, \delta \Lambda) = & \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} \left( 1 - S_n^{(j)} \right) \eta p^{(k)} \Lambda \cdot \delta \Lambda dA^s \\ & + \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} S_n^{(j)} \eta p^{(k)} \left( (1 - S_T) \Lambda - S_T h_T \mathbf{v}_T \right. \\ & \left. - (1 - S_T) \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \right) \cdot \delta \Lambda dA^s = 0, \end{aligned} \quad (4.366)$$

$$\mathcal{J}_T(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_{\Gamma^s} S_n^{(j)} S_T \kappa_T \eta p^{(k)} \mathbf{v}_T \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s. \quad (4.367)$$

In den Funktionalen der generalisierten COULOMB'schen Reibung (4.318), (4.329) und (4.337) kann in der Haftrotationsgrenze  $\eta_c p$  der Druck ebenfalls durch  $p^{(k)}$  ersetzt werden:

$$\mathcal{G}_R(\mathbf{m}, \Lambda_c, \delta \mathbf{m}) = - \int_{\Gamma^s} S_n^{(j)} \left( S_R \eta_c p^{(k)} \Lambda_c + (1 - S_R) \eta_c p^{(k)} \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}\|} \right) \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \quad (4.368)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R(\mathbf{m}, \Lambda_c, \delta \Lambda_c) = & \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} (1 - S_n^{(j)}) \eta_c p^{(k)} \Lambda_c \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\ & + \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} S_n^{(j)} \eta_c p^{(k)} \left( (1 - S_R) \Lambda_c - S_R h_R \Delta \boldsymbol{\omega} - (1 - S_R) \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}\|} \right) \cdot \delta \Lambda_c dA^s = 0, \end{aligned} \quad (4.369)$$

$$\mathcal{J}_R(\mathbf{m}, \delta \mathbf{m}) = - \int_{\Gamma^s} S_n^{(j)} S_R \kappa_R \eta_c p^{(k)} \Delta \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s. \quad (4.370)$$

#### 4.4.3 Linearisierung der Kontaktfunktionale, NEWTON-Verfahren, (i)

Die Iterationsvorschrift des NEWTON-Verfahrens für die Verschiebungsvektoren und Rotationstensoren fasst man für skalare  $\lambda = 1$  und  $\mu = 1$  anhand von

$$(\mathbf{u}^s)^{(i+1)} = (\mathbf{u}^s)^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}^s = (\mathbf{u}^s)^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}^s, \quad (4.371)$$

$$(\check{\mathbf{u}}^m)^{(i+1)} = (\check{\mathbf{u}}^m)^{(i)} + \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m = (\check{\mathbf{u}}^m)^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m, \quad (4.372)$$

$$(\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i+1)} = \exp(\text{spn}(\Delta^{(i)} \mathbf{m}^s)) (\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i)} = \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s)) (\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i)}, \quad (4.373)$$

$$\check{\mathbf{R}}^{(i+1)} = \exp(\text{spn}(\Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}})) \check{\mathbf{R}}^{(i)} = \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}})) \check{\mathbf{R}}^{(i)}. \quad (4.374)$$

zusammen, wobei NEWTON-Schritte wieder mit dem Index (i) gekennzeichnet werden. Der Abstand ist damit durch

$$\mathbf{g}^{(i+1)} = \check{\mathbf{n}}^{(l)} \cdot \left( (\mathbf{u}^s)^{(i+1)} - (\check{\mathbf{u}}^m)^{(i+1)} \right) \quad (4.375)$$

gegeben. Die Funktionale bezüglich der Kontaktfläche enthalten zudem Tangential- und Rotationsgeschwindigkeiten, die ebenfalls linearisiert werden müssen. In der NEWTON-Iteration (i) in Zeitschritt  $t + \Delta t$  führt man zunächst die Verschiebungs- und Rotationsdifferenzen ausgehend vom letzten Zeitschritt  $t$  ein:

$$\Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s := (\mathbf{u}^s)^{(i)} - \mathbf{u}_t^s, \quad (4.376)$$

$$\Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m := (\check{\mathbf{u}}^m)^{(i)} - \check{\mathbf{u}}_t^m, \quad (4.377)$$

$$\Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s := (\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i)} (\bar{\mathbf{R}}_t^s)^T \quad (4.378)$$

$$\Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} := \check{\mathbf{R}}^{(i)} \check{\mathbf{R}}_t^T \quad (4.379)$$

Die Berücksichtigung dieser Gleichungen in (4.371)-(4.374) führt mit  $\lambda = 1$  und  $\mu = 1$  auf

$$(\mathbf{u}^s)^{(i+1)} = \mathbf{u}_t^s + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s + \lambda \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s, \quad (4.380)$$

$$(\check{\mathbf{u}}^m)^{(i+1)} = \check{\mathbf{u}}_t^m + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m + \lambda \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m, \quad (4.381)$$

$$(\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i+1)} = \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) \bar{\mathbf{R}}_t^s, \quad (4.382)$$

$$\check{\mathbf{R}}^{(i+1)} = \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) \check{\mathbf{R}}_t, \quad (4.383)$$

wobei  $\bar{\mathbf{R}}_t^s$ ,  $\check{\mathbf{R}}_t$  festgehaltene Rotationstensoren des letzten Zeitschrittes bezeichnen. Die Tangentialgeschwindigkeit (4.347) kann mit (4.380) und (4.381) durch

$$\mathbf{v}_T^{(i+1)} = \left( \mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)} \right) \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s + \lambda \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s \right) - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m + \lambda \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right) \right], \quad (4.384)$$

geschrieben werden. Bezüglich der *slave*- und *master*-Flächen erhält man mit (4.348) und  $\mu = 1$  zunächst die Darstellung der Spintensoren

$$(\boldsymbol{\Omega}^s)^{(i+1)} = \frac{2}{\Delta t} \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) - \mathbf{1} \right) \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) + \mathbf{1} \right)^{-1}, \quad (4.385)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{(i+1)} = \frac{2}{\Delta t} \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) - \mathbf{1} \right) \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) + \mathbf{1} \right)^{-1} \quad (4.386)$$

und den Vektor der Spindifferenz in der aktuellen NEWTON-Iteration

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\omega}^{(i+1)} &= \text{axl} \left( (\boldsymbol{\Omega}^s)^{(i+1)} - \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{(i+1)} \right) \\ &= \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) - \mathbf{1} \right) \right. \\ &\quad \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) + \mathbf{1} \right)^{-1} \\ &\quad - \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) - \mathbf{1} \right) \\ &\quad \left. \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.387)$$

Im Fall der Normalkontakt- und COULOMB-Funktionale erhält man

$$\mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{p}^{(i)} + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p}, \quad (4.388)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(i+1)} = \boldsymbol{\Lambda}^{(i)} + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}, \quad (4.389)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_c^{(i+1)} = \boldsymbol{\Lambda}_c^{(i)} + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}_c. \quad (4.390)$$

Die Größen  $\Delta \mathbf{p}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\Lambda}$  und  $\Delta \boldsymbol{\Lambda}_c$  werden jeweils als inkrementeller Kontaktdruck, Spannungs und Momentenspannungsmultiplikator bezeichnet. Die Zeitschrittinkremente innerhalb der letzten NEWTON-Iteration sind definiert als

$$\Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p} := \mathbf{p}^{(i)} - \mathbf{p}_t, \quad (4.391)$$

$$\Delta_{\Delta t}^{(i)} \boldsymbol{\Lambda} := \boldsymbol{\Lambda}^{(i)} - \boldsymbol{\Lambda}_t, \quad (4.392)$$

$$\Delta_{\Delta t}^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}_c := (\boldsymbol{\Lambda}_c)^{(i)} - (\boldsymbol{\Lambda}_c)_t. \quad (4.393)$$

Diese Definitionen zusammen mit den Gleichungen (4.388)–(4.390) ergeben

$$\mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{p}_t + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p} + \Delta^{(i)} \mathbf{p}, \quad (4.394)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(i+1)} = \mathbf{\Lambda}_t + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}, \quad (4.395)$$

$$\mathbf{\Lambda}_c^{(i+1)} = (\mathbf{\Lambda}_c)_t + \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c. \quad (4.396)$$

Die Inkremente dieser Größen werden im Gegensatz z.B. zu Verschiebungsincrementen nicht über die Zeitschritte aufaddiert, so dass geeignete Startwerte bei  $i = 0$  im Zeitschritt  $t + \Delta t$  ungeachtet der letzten Zeitschrittlösung jeweils

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{0}, \quad (4.397)$$

$$\mathbf{\Lambda}_t = \mathbf{0}, \quad (4.398)$$

$$(\mathbf{\Lambda}_c)_t = \mathbf{0}, \quad (4.399)$$

sind. Mit  $\lambda = \mu = 1$  gilt damit

$$\mathbf{p}^{(i+1)} = \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p} = \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{p}, \quad (4.400)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(i+1)} = \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \Delta \mathbf{\Lambda} = \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}, \quad (4.401)$$

$$\mathbf{\Lambda}_c^{(i+1)} = \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \Delta \mathbf{\Lambda}_c = \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c. \quad (4.402)$$

Die Linearisierung der Funktionale der Kontaktgesetze führt auf

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\mathbf{u}^{(i+1)}, \mathbf{m}^{(i+1)}, \mathbf{p}^{(i+1)}, \mathbf{\Lambda}^{(i+1)}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{p}, \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \Big|_{\lambda=\mu=1} \\ &= \mathcal{F}^{(i)} + \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu} \right]_{\lambda=\mu=0} \\ &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0 \end{aligned} \quad (4.403)$$

und

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_c(\mathbf{u}^{(i+1)}, \mathbf{m}^{(i+1)}, \mathbf{\Lambda}_c^{(i+1)}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \\ &= \mathcal{F}_c(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{m}) \Big|_{\lambda=\mu=1} \\ &= \mathcal{F}_c^{(i)} + \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \mu} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.404)$$

Die Linearisierung des Funktionals der Normalkontaktbedingungen führt auf

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p(\mathbf{u}^{(i+1)}, \mathbf{p}^{(i+1)}, \delta \mathbf{p}) &= \mathcal{H}_p(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{p}, \delta \mathbf{p}) \Big|_{\lambda=1} \\ &= \mathcal{H}_p^{(i)} + \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.405)$$

Für das Funktional des klassischen COULOMB'schen Reibungsgesetz erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_T(\mathbf{u}^{(i+1)}, \Lambda^{(i+1)}, \delta \Lambda) &= \mathcal{H}_T(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \Delta_{\Delta t}^{(i)} \Lambda + \lambda \Delta^{(i)} \Lambda, \delta \Lambda) \Big|_{\lambda=1} \\ &= \mathcal{H}_T^{(i)} + \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0\end{aligned}\quad (4.406)$$

und für das generalisierte Reibungsgesetz der Rotationen

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_R(\mathbf{m}^{(i+1)}, \Lambda_c^{(i+1)}, \delta \Lambda_c) &= \mathcal{H}_R(\exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \Delta_{\Delta t}^{(i)} \Lambda_c + \mu \Delta^{(i)} \Lambda_c, \delta \Lambda_c) \Big|_{\mu=1} \\ &= \mathcal{H}_R^{(i)} + \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = 0.\end{aligned}\quad (4.407)$$

Die Funktionalableitungen und rechten Seiten des linearisierten Kontaktproblems lassen sich nun zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \mu} \right]_{\lambda=\mu=0} &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = -\mathcal{F}^{(i)},\end{aligned}\quad (4.408)$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_c}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}_c}{\partial \mu} \right]_{\lambda=\mu=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} + \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = -\mathcal{F}_c^{(i)},\quad (4.409)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = -\mathcal{H}_p^{(i)},\quad (4.410)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = -\mathcal{H}_T^{(i)},\quad (4.411)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = -\mathcal{H}_R^{(i)}.\quad (4.412)$$

Die partiellen Ableitungen der Volumenfunktionale  $\bar{\mathcal{F}}$  und  $\bar{\mathcal{F}}_c$  in den ersten beiden Gleichungen (4.408) und (4.409) entnimmt man den Gleichungen (4.66)–(4.69). Es ist hilfreich, die Schreibweisen

$$\mathcal{U} := \left( (\mathbf{u}^s)^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}^s, (\check{\mathbf{u}}^m)^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right),\quad (4.413)$$

$$\mathcal{O} := \left( \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s)) (\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i)}, \exp(\text{spn}(\mu \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}})) \check{\mathbf{R}}^{(i)} \right),\quad (4.414)$$



einzuführen. Weiterhin seien mit (4.375), (4.384) und (4.509) die partiellen Ableitungen angegeben:

$$\left[ \frac{\partial g(\mathcal{U})}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \check{\mathbf{n}}^{(l)} \cdot \left( \Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right), \quad (4.415)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{v}_T(\mathcal{U})}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \left( \mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)} \right) \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right), \quad (4.416)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \\ &\quad \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \\ &\quad \left. - \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.417)$$

Aus den Iterationsvorschriften (4.400)–(4.402) erhält man mit Hilfe der Definitionen

$$\mathbf{p}_\lambda := \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{p}, \quad (4.418)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_\lambda := \Delta_{\Delta t}^{(i)} \boldsymbol{\Lambda} + \lambda \Delta^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}, \quad (4.419)$$

$$(\boldsymbol{\Lambda}_c)_\mu := \Delta_{\Delta t}^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}_c + \mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}_c \quad (4.420)$$

die Ableitungen:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{p}_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \Delta^{(i)} \mathbf{p}, \quad (4.421)$$

$$\left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \Delta^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}, \quad (4.422)$$

$$\left[ \frac{\partial (\boldsymbol{\Lambda}_c)_\mu}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = \Delta^{(i)} \boldsymbol{\Lambda}_c. \quad (4.423)$$

---

Kein Kontakt:  $S_n^{(j)} = 0$

---

Wird  $S_n^{(j)} = 0$  in die Funktionale (4.362)–(4.318) eingesetzt, dann erhält man die nicht-trivialen Funktionale

$$\mathcal{H}_p = - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_n} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{p} \, dA^s = 0, \quad (4.424)$$

$$\mathcal{H}_T = \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} \eta \, \mathbf{p}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \delta \boldsymbol{\Lambda} \, dA^s = 0, \quad (4.425)$$

$$\mathcal{H}_R = \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \eta_c \, \mathbf{p}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_c \cdot \delta \boldsymbol{\Lambda}_c \, dA^s = 0. \quad (4.426)$$

Die Ableitungen der restlichen Kontaktfunktionale verschwinden:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= 0, & \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= 0, & \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= 0, & \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= 0, & \left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.427)$$

In *Code\_Aster* werden bei keinem Kontakt anstatt (4.425) und (4.429) die Funktionale

$$\overline{\mathcal{H}}_T := \int_{\Gamma^s} \Lambda \cdot \delta \Lambda \, dA^s = 0, \quad (4.428)$$

$$\overline{\mathcal{H}}_R := \int_{\Gamma^s} \Lambda_c \cdot \delta \Lambda_c \, dA^s = 0 \quad (4.429)$$

linearisiert, so dass

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_n} \left[ \frac{\partial p_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \delta p \, dA^s, \quad (4.430)$$

$$\left[ \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} \left[ \frac{\partial \Lambda_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \cdot \delta \Lambda \, dA^s, \quad (4.431)$$

$$\left[ \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = \int_{\Gamma^s} \left[ \frac{\partial (\Lambda_c)_\mu}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \Lambda_c \, dA^s. \quad (4.432)$$

Die Linearisierung liefert schließlich mit (4.421)–(4.423):

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_n} \Delta^{(i)} p \, \delta p \, dA^s, \quad (4.433)$$

$$\left[ \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} \Delta^{(i)} \Lambda \cdot \delta \Lambda \, dA^s, \quad (4.434)$$

$$\left[ \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = \int_{\Gamma^s} \Delta^{(i)} \Lambda_c \cdot \delta \Lambda_c \, dA^s. \quad (4.435)$$

---

**Kontakt:**  $S_n^{(j)} = 1$

---

Durch Einsetzen von  $S_n^{(j)} = 1$  erhält man aus (4.362)–(4.364) zunächst die Anteile

$$\mathcal{G}_p = \int_{\Gamma^s} p \, \delta g \, dA^s, \quad (4.436)$$

$$\mathcal{H}_p = \int_{\Gamma^s} g \, \delta p \, dA^s = 0, \quad (4.437)$$

$$\mathcal{J}_p = \int_{\Gamma^s} \kappa_n g \, \delta g \, dA^s. \quad (4.438)$$

Eine Linearisierung dieser Funktionale führt auf die Gleichungen

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} \left[ \frac{\partial p_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \delta g \, dA^s, \quad (4.439)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} \left[ \frac{\partial g(\mathcal{U})}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \delta p \, dA^s. \quad (4.440)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} \kappa_n \left[ \frac{\partial g(\mathcal{U})}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \delta g \, dA^s \quad (4.441)$$

und schließlich unter Berücksichtigung von (4.415) und (4.421) auf

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} (\Delta^{(i)} p) \, \check{\mathbf{n}}^{(i)} \cdot (\delta \mathbf{u}^s - \delta \check{\mathbf{u}}^m) \, dA^s, \quad (4.442)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} \check{\mathbf{n}}^{(l)} \cdot (\Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m) \, \delta p \, dA^s, \quad (4.443)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = \int_{\Gamma^s} \kappa_n \check{\mathbf{n}}^{(l)} \cdot (\Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m) \, \delta g \, dA^s. \quad (4.444)$$

---

## Reibungsstatus

---

Um den Status des Reibungskontaktes zu erhalten, wird die Approximation

$$\mathbf{S}_T^{(i+1)} \approx \mathbf{I}_1 \left( \mathbf{g}_T^{(i)} \right) = \mathbf{S}_T^{(i)} \quad (4.445)$$

verwendet, wobei unter Berücksichtigung von (4.196) gilt:

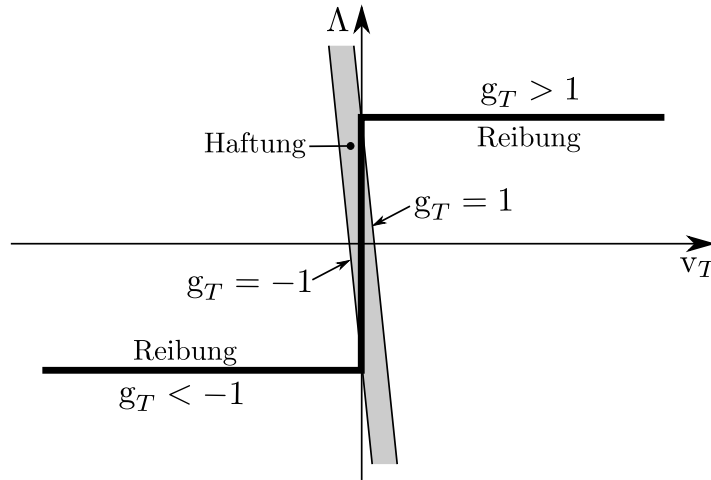
$$\begin{aligned} \mathbf{g}_T^{(i+1)} &= \mathbf{\Lambda}^{(i+1)} + \rho_T \mathbf{v}_T^{(i+1)}, \\ &= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda} \\ &\quad + \rho_T \frac{1}{\Delta t} \left( \mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)} \right) \left[ \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s + \Delta^{(i)} \mathbf{u}^s \right) - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m + \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right) \right], \\ &= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \rho_T \frac{1}{\Delta t} \left( \mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)} \right) \left[ \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right] \\ &\quad + \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \rho_T \frac{1}{\Delta t} \left( \mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)} \right) \left[ \Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right]. \end{aligned} \quad (4.446)$$

Für die tangentielle Relativgeschwindigkeit des Iterationsschrittes  $(i)$  gilt zudem

$$\mathbf{v}_T^{(i)} = \left( \mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)} \right) \frac{1}{\Delta t} \left[ \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right], \quad (4.447)$$

so dass man bezüglich der Iteration  $(i)$  definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_T^{(i)} &:= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \rho_T \frac{1}{\Delta t} \left( \mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)} \right) \left[ \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m \right], \\ &= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda} + \rho_T \mathbf{v}_T^{(i)}. \end{aligned} \quad (4.448)$$



**Abbildung 4.6:** Reibgesetz nach COULOMB mit Regularisierung. Das exakte Normalkontaktgesetz ist durch die dicke Linie gekennzeichnet. Die Steigung der Geraden mit  $g_T = 1$  und  $g_T = -1$  wird über den Parameter  $\rho_T$  festgelegt.

Über den Parameter  $\rho_T$  ist eine Regularisierung des Reibungsstatus möglich, siehe Bild 4.6. Dargestellt ist zum Einen das exakte COULOMB'sche Gesetz durch die breite Linie, zum Anderen die Geraden  $\Lambda = -\rho_T v_T + g_T$  (eindimensionale Betrachtung) der Regularisierung für die Werte  $g_T = 1$  und  $g_T = -1$ . Die Geraden schließen wie aus dem Bild ersichtlich den Haftungsbereich ein (im Bild als grauer Bereich dargestellt). Es lassen sich so auch kleine Werte  $\|\mathbf{v}_T^{(i)}\| \neq 0$  noch dem Haftungsfall mit  $S_T = 1$  zuordnen.

Das Entscheidungskriterium, ob Haftung oder Reibung vorliegt, folgt dann aus den Größen  $\Delta_t^{(i)} \Lambda$  und  $\mathbf{v}_T^{(i)}$  der letzten NEWTON-Iteration:

$$\|\mathbf{g}_T^{(i)}\| < 1 \Rightarrow S_T^{(i)} = 1 \Rightarrow \text{Haftung}, \quad (4.449)$$

$$\|\mathbf{g}_T^{(i)}\| \geq 1 \Rightarrow S_T^{(i)} = 0 \Rightarrow \text{Grenzhaftung und Reibung}. \quad (4.450)$$

---

**Haftung:**  $S_n^{(j)} = 1$ ,  $S_T^{(i)} = 1$

---

Man setzt  $S_n^{(j)} = 1$  und  $S_T^{(i)} = 1$  in (4.365)–(4.453) ein

$$\mathcal{G}_T = - \int_{\Gamma^s} \eta p^{(k)} \Lambda \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s, \quad (4.451)$$

$$\mathcal{H}_T = - \int_{\Gamma^s} \eta p^{(k)} \mathbf{v}_T \cdot \delta \Lambda dA^s = 0, \quad (4.452)$$

$$\mathcal{J}_T = - \int_{\Gamma^s} \kappa_T \eta p^{(k)} \mathbf{v}_T \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s. \quad (4.453)$$

Im Haftungsfall werden damit die Funktionalableitungen der Anteile

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta p^{(k)} \left[ \frac{\partial \Lambda_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \cdot \delta \mathbf{u}_T dA^s, \quad (4.454)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta p^{(k)} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_T(\mathcal{U})}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \cdot \delta \Lambda dA^s, \quad (4.455)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \kappa_T \eta p^{(k)} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_T(\mathcal{U})}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s \quad (4.456)$$

gebildet. Mit (4.416) und (4.422) erhält man daraus die linearisierten Funktionalanteile

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta p^{(k)} (\Delta^{(i)} \Lambda) \cdot \delta \mathbf{u}_T dA^s, \quad (4.457)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta p^{(k)} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)}) [\Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m] \cdot \delta \Lambda dA^s, \quad (4.458)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \kappa_T \eta p^{(k)} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)}) [\Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m] \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s. \quad (4.459)$$

---

**Reibung:**  $S_n^{(j)} = 1$ ,  $S_T^{(i)} = 0$

---

Im Fall der klassischen Reibung mit  $S_n^{(j)} = 1$  und  $S_T^{(i)} = 0$  erhält man aus (4.365)–(4.453) die Anteile

$$\mathcal{G}_T = - \int_{\Gamma^s} \eta p^{(k)} \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \cdot \delta \mathbf{u}_\tau dA^s, \quad (4.460)$$

$$\mathcal{H}_T = \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} \eta p^{(k)} \Lambda - \frac{1}{h_T} \eta p^{(k)} \frac{\Lambda + h_T \mathbf{v}_T}{\|\Lambda + h_T \mathbf{v}_T\|} \cdot \delta \Lambda dA^s = 0, \quad (4.461)$$

$$\mathcal{J}_T = 0 \quad (4.462)$$

Für die Linearisierung dieser Funktionale ist es hilfreich, zunächst einen Hilfsvektor zu definieren (siehe ABBAS [2]):

$$\mathbf{h} := \Lambda + h_T \mathbf{v}_T. \quad (4.463)$$

Nach Normierung dieses Vektors liefert die Ableitung

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}^{(i)} \otimes \mathbf{h}^{(i)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \right) \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \right]. \quad (4.464)$$

Zusammen mit dieser Beziehung lässt sich die Linearisierung der Anteile (4.365)–(4.453) anhand von

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta p^{(k)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}^{(i)} \otimes \mathbf{h}^{(i)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{\partial (\Lambda_\lambda + h_T \mathbf{v}_T(\mathcal{U}))}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \cdot \delta \mathbf{u}_T dA^s, \quad (4.465)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} \eta p^{(k)} \left[ \frac{\partial \Lambda_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \cdot \delta \Lambda dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} \frac{\eta p^{(k)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}^{(i)} \otimes \mathbf{h}^{(i)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{\partial (\Lambda_\lambda + h_T \mathbf{v}_T(\mathcal{U}))}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \cdot \delta \Lambda dA^s, \end{aligned} \quad (4.466)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0 \quad (4.467)$$

ausdrücken. Mit (4.416) und (4.422) erhält man

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta p^{(k)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}^{(i)} \otimes \mathbf{h}^{(i)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \right) [\Delta^{(i)} \Lambda] \cdot \delta \mathbf{u}_T dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta p^{(k)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}^{(i)} \otimes \mathbf{h}^{(i)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \right) \\ &\quad \quad \left[ \frac{h_T}{\Delta t} (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)}) [\Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m] \right] \cdot \delta \mathbf{u}_T dA^s, \end{aligned} \quad (4.468)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} &= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} \eta p^{(k)} (\Delta^{(i)} \Lambda) \cdot \delta \Lambda dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_T} \frac{\eta p^{(k)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}^{(i)} \otimes \mathbf{h}^{(i)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \right) [\Delta^{(i)} \Lambda] \cdot \delta \Lambda dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta p^{(k)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}^{(i)} \otimes \mathbf{h}^{(i)}}{\|\mathbf{h}^{(i)}\|^2} \right) \\ &\quad \quad \left[ \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{1} - \check{\mathbf{n}}^{(l)} \otimes \check{\mathbf{n}}^{(l)}) [\Delta^{(i)} \mathbf{u}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}^m] \right] \cdot \delta \Lambda dA^s \end{aligned} \quad (4.469)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_T}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0. \quad (4.470)$$

---

### Reibungskriterium bei Rotationen

---

Um den Status des Reibungskontaktes zu erhalten, wird die Approximation

$$\mathbf{S}_R^{(i+1)} \approx \mathbf{I}_1 \left( \mathbf{g}_R^{(i)} \right) = \mathbf{S}_R^{(i)} \quad (4.471)$$

verwendet, wobei man mit (4.387) erhält:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_R^{(i+1)} &= \mathbf{\Lambda}_c^{(i+1)} + \rho_R \Delta \boldsymbol{\omega}^{(i+1)} \\
&= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c \\
&\quad + \rho_R \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) - \mathbf{1} \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) + \mathbf{1} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\bar{\mathbf{R}}} \right) - \mathbf{1} \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \exp \left( \text{spn} \left( \mu \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\bar{\mathbf{R}}} \right) + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\}. \tag{4.472}
\end{aligned}$$

Man definiert den Multiplikator der letzten bekannten NEWTON-Iteration mit  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_R^{(i)} &:= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c \\
&\quad + \rho_R \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\bar{\mathbf{R}}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\bar{\mathbf{R}}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\}. \tag{4.473}
\end{aligned}$$

Für das Entscheidungskriterium, ob Rotationshaftung oder -reibung vorliegt, werden demnach die Größen der letzten NEWTON-Iteration ( $i$ ) verwendet:

$$\|\mathbf{g}_R^{(i)}\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad S_R^{(i)} = 1, \tag{4.474}$$

$$\|\mathbf{g}_R^{(i)}\| > 1 \quad \Rightarrow \quad S_R^{(i)} = 0. \tag{4.475}$$

---

**Rotationshaftung:**  $S_n^{(j)} = 1, S_R^{(i)} = 1$

---

Man greift zurück auf (4.368)–(4.370) und setzt  $S_n^{(j)} = 1$  und  $S_R^{(i)} = 1$  ein:

$$\mathcal{G}_R = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \mathbf{\Lambda}_c \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \tag{4.476}$$

$$\mathcal{H}_R = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \Delta \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \mathbf{\Lambda}_c dA^s, \tag{4.477}$$

$$\mathcal{J}_R = - \int_{\Gamma^s} \kappa_R \eta_c p^{(k)} \Delta \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s. \tag{4.478}$$

Eine Linearisierung dieser Ausdrücke liefert die Funktionalableitungen

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial (\mathbf{\Lambda}_c)_\mu}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \tag{4.479}$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \mathbf{\Lambda}_c dA^s, \tag{4.480}$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \kappa_R \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s. \tag{4.481}$$

Weiterhin ergibt sich daraus unter Berücksichtigung von (4.417) und (4.423)

$$\frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \left( \Delta^{(i)} \Lambda_c \right) \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \quad (4.482)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \\ \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right. \\ \left. - \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \\ \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\} \cdot \delta \Lambda_c dA^s, \end{aligned} \quad (4.483)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} = - \int_{\Gamma^s} \kappa_R \eta_c p^{(k)} \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \\ \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right. \\ \left. - \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \\ \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s. \end{aligned} \quad (4.484)$$

---

Rotationsreibung:  $S_n^{(j)} = 1$ ,  $S_R^{(i)} = 0$

---

Unter Verwendung von  $S_n^{(j)} = 1$  und  $S_R^{(i)} = 0$  erhält man ausgehend von (4.368)–(4.370)

$$\mathcal{G}_R = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \quad (4.485)$$

$$\mathcal{H}_R = \int_{\Gamma^s} \left( \frac{1}{h_R} \eta_c p^{(k)} \Lambda_c - \frac{1}{h_R} \eta_c p^{(k)} \frac{\Lambda_c + h_R \Delta \omega}{\|\Lambda_c + h_R \Delta \omega\|} \right) \cdot \delta \Lambda_c dA^s = 0, \quad (4.486)$$

$$\mathcal{J}_R = 0. \quad (4.487)$$

Bei Reibrotation wird ein Hilfsvektor anhand der Definition

$$\mathbf{h}_c := \Lambda_c + h_R \Delta \omega \quad (4.488)$$

eingeführt, wobei die Ableitung der Norm von  $\mathbf{h}_c$  die Gleichung

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\mathbf{h}_c}{\|\mathbf{h}_c\|} \right) \right]_{\mu=0} = \frac{1}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_c}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \right] \quad (4.489)$$

ergibt. Der relative Spin der letzten NEWTON-Iteration ist dabei durch

$$\begin{aligned} \Delta \omega^{(i)} = \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right. \\ \left. - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (4.490)$$



gegeben. Man erhält damit die Linearisierungen der Reibrotationsfunktionale

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{\partial \left( (\Lambda_c)_\mu + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathcal{O}) \right)}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \quad (4.491)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial (\Lambda_c)_\mu}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{\partial \left( (\Lambda_c)_\mu + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathcal{O}) \right)}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \Lambda_c dA^s, \end{aligned} \quad (4.492)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = 0. \quad (4.493)$$

Mit (4.417) und (4.423) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \Delta^{(i)} \Lambda_c \right] \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{2 h_R}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\} \right] \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \end{aligned} \quad (4.494)$$

und

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \eta_c p^{(k)} \left( \Delta^{(i)} \Lambda_c \right) \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\
&- \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \Delta^{(i)} \Lambda_c \right] \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\
&- \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \\
&\quad \left[ \frac{2}{\Delta t} \text{axl} \left\{ \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^s + \mathbf{1} \right)^{-1} \\
&\quad \quad \left. \left. - \left( \mathbf{1} - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} - \mathbf{1} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. \text{spn} \left( \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} \right) \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{R}} + \mathbf{1} \right)^{-1} \right\} \right] \cdot \delta \Lambda_c dA^s. \quad (4.495)
\end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = 0. \quad (4.496)$$

---

#### 4.4.4 Diskretisierung der Kontaktformulierung

---

Wesentlich ist eine Unterteilung der *master*- und *slave*-Kontaktflächen  $\Gamma^s$  und  $\Gamma^m$  in diskrete Flächenelemente  $(\Gamma^s)^{(e)}$  und  $(\Gamma^m)^{(e)}$ , wobei die Eckpunkte der Elemente als Knoten bezeichnet werden. Bezüglich der Flächenelemente werden lokale Formfunktionen eingeführt,  $N^s$  und  $N^m$ , die wie im Fall der Volumenelemente meist Polynome eines bestimmten Grades darstellen. Die Kontaktzwischenschicht setzt sich zusammen aus den Elementen  $(\Gamma^s)^{(e)}$ , so dass insbesondere die Größen  $p$ ,  $\Lambda$  und  $\Lambda_c$  durch eine Linearkombination mit den Formfunktionen  $N^s$  dargestellt

werden. Darüber hinaus werden diese Größen im Gegensatz zu Verschiebungen nicht über die Zeitschritte aufaddiert. Insgesamt erhält man im Flächenelement (e) die Darstellung

$$(\mathbf{u}^s)^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s (\mathbf{u}^s)_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s \Delta^{(i)} \mathbf{u}_p^s, \quad \delta \mathbf{u}^s = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} \delta \mathbf{u}_Q^s N_Q^s, \quad (4.497)$$

$$(\check{\mathbf{u}}^m)^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^m (\check{\mathbf{u}}^m)_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^m \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}_p^m, \quad \delta \check{\mathbf{u}}^m = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} \delta \check{\mathbf{u}}_Q^m N_Q^m, \quad (4.498)$$

$$(\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i+1)} = \exp \left( \text{spn} \left( \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p \Delta^{(i)} \mathbf{m}_p^s \right) \right) (\bar{\mathbf{R}}^s)^{(i)}, \quad \delta \mathbf{m}^s = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} (\delta \mathbf{m}^s)_Q N_Q^s, \quad (4.499)$$

$$(\check{\mathbf{R}})^{(i+1)} = \exp \left( \text{spn} \left( \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}}_p \right) \right) (\check{\mathbf{R}})^{(i)}, \quad \delta \check{\mathbf{m}} = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} \delta \check{\mathbf{m}}_Q N_Q^m, \quad (4.500)$$

$$\mathbf{p}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{p}_p + \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s \Delta^{(i)} \mathbf{p}_p, \quad \delta \mathbf{p} = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} \delta \mathbf{p}_Q^s N_Q^s, \quad (4.501)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_p + \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_p, \quad \delta \mathbf{\Lambda} = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} \delta \mathbf{\Lambda}_Q N_Q^s, \quad (4.502)$$

$$\mathbf{\Lambda}_c^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c \right)_p + \sum_{p=1}^{n^{(e)}} N_p^s \left( \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c \right)_p, \quad \delta \mathbf{\Lambda}_c = \sum_{Q=1}^{n^{(e)}} (\delta \mathbf{\Lambda}_c)_Q N_Q^s. \quad (4.503)$$

Der Wert  $n^{(e)}$  entspricht dabei der Knotenanzahl der Flächenelemente, wobei im Allgemeinen *master*- und *slave*-Elemente unterschiedliche Knotenanzahlen besitzen dürfen. Im Fall eines Flächenelementes der Kontaktfläche erhält man die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_\Gamma^{(e)} := \left( \begin{array}{ccccc|cc} \mathbf{K}^{u^s u^s} & 0 & \mathbf{K}^{u^s p} & \mathbf{K}^{u^s \Lambda} & 0 & \mathbf{K}^{u^s u^m} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{\varphi^s \varphi^s} & 0 & 0 & \mathbf{K}^{\varphi^s \Lambda_c} & 0 & \mathbf{K}^{\varphi^s \varphi^m} \\ \mathbf{K}^{p u^s} & 0 & \mathbf{K}^{p p} & 0 & 0 & \mathbf{K}^{p u^m} & 0 \\ \mathbf{K}^{\Lambda u^s} & 0 & 0 & \mathbf{K}^{\Lambda \Lambda} & 0 & \mathbf{K}^{\Lambda u^m} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{\Lambda_c \varphi^s} & 0 & 0 & \mathbf{K}^{\Lambda_c \Lambda_c} & 0 & \mathbf{K}^{\Lambda_c \varphi^m} \\ \hline \mathbf{K}^{u^m u^s} & 0 & \mathbf{K}^{u^m p} & \mathbf{K}^{u^m \Lambda} & 0 & \mathbf{K}^{u^m u^m} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{\varphi^m \varphi^s} & 0 & 0 & \mathbf{K}^{\varphi^m \Lambda_c} & 0 & \mathbf{K}^{\varphi^m \varphi^m} \end{array} \right), \quad (4.504)$$

den Elementlösungsvektor

$$\Delta \Phi_\Gamma^{(e)} := \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^s \\ \Delta \mathbf{m}^s \\ \Delta \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{\Lambda} \\ \Delta \mathbf{\Lambda}_c \\ \Delta \check{\mathbf{u}}^m \\ \Delta \check{\mathbf{m}} \end{pmatrix} \quad (4.505)$$

$$(4.506)$$

und den Elementlastvektor

$$\mathbf{F}_\Gamma^{(e)} := \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{u^s} \\ \mathbf{F}^{\varphi^s} \\ \mathbf{F}^p \\ \mathbf{F}^\Lambda \\ \mathbf{F}^{\Lambda_c} \\ \frac{\mathbf{F}^{u^m}}{\mathbf{F}^{\varphi^m}} \end{pmatrix}. \quad (4.507)$$

In diesem Gleichungssystem existiert insbesondere eine Kopplung der Größen bezüglich *master*- und *slave*-Flächenelemente, was anhand von horizontalen und vertikalen Trennstrichen geordnet dargestellt wird. Für jedes Element (e) der Kontaktfläche werden die Einträge der Matrizen  $\mathbf{K}_\Gamma^{(e)}$ ,  $\Phi_\Gamma^{(e)}$  und  $\mathbf{F}_\Gamma^{(e)}$  anhand einer numerischen Integration der materialspezifischen Gleichungen berechnet. Anschließend wird bei der sogenannten Assemblierung zusammen mit den Einträgen der volumetrischen Matrizen  $\mathbf{K}^{(e)}$  und Vektoren  $\Phi^{(e)}$  und  $\mathbf{F}^{(e)}$  ein lineares Gesamtgleichungssystem

$$\mathbf{K}[\Delta\Phi] = \mathbf{F} \quad (4.508)$$

gebildet, wobei  $\mathbf{K}$  als Steifigkeitsmatrix,  $\Delta\Phi$  als Lösungsvektor und  $\mathbf{F}$  als Lastvektor bezeichnet werden. Das System (4.508) lässt sich mit einem geeigneten numerischen Verfahren lösen.

---

#### 4.4.5 Kleine Kontaktrotationen

---

Bei kleinen Deformationen ist der Differenzspin durch die durch die Gleichung

$$\Delta\omega = \frac{1}{\Delta t} \left( \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} + \mu \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \quad (4.509)$$

gegeben. Mit Hilfe der Definition

$$\mathcal{M} := \left( (\mathbf{m}^s)^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s, (\check{\mathbf{m}})^{(i)} + \mu \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \quad (4.510)$$

lässt sich die Linearisierung des Spins (4.509) durch

$$\left[ \frac{\partial \Delta\omega(\mathcal{M})}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \quad (4.511)$$

darstellen.

---

#### Reibungskriterium bei Rotationen

---

Um den Status des Reibungskontaktes zu erhalten, wird die Approximation

$$\mathbf{S}_R^{(i+1)} \approx \mathbf{I}_1 \left( \mathbf{g}_R^{(i)} \right) = \mathbf{S}_R^{(i)} \quad (4.512)$$

verwendet, wobei

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_R^{(i+1)} &= \mathbf{\Lambda}_c^{(i+1)} + \rho_R \Delta \boldsymbol{\omega}^{(i+1)} \\
&= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \rho_R \frac{1}{\Delta t} \left( \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s + \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s \right) - \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} + \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \right) \\
&= \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \rho_R \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) + \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \rho_R \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right). \quad (4.513)
\end{aligned}$$

Man definiert den Multiplikator der letzten NEWTON-Iteration

$$\mathbf{g}_R^{(i)} := \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c + \rho_R \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta_{\Delta t}^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta_{\Delta t}^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right). \quad (4.514)$$

Für das Entscheidungskriterium, ob Rotationshaftung oder -reibung vorliegt, werden demnach die Größen der letzten NEWTON-Iteration  $(i)$  verwendet:

$$\|\mathbf{g}_R^{(i)}\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad S_R^{(i)} = 1, \quad (4.515)$$

$$\|\mathbf{g}_R^{(i)}\| > 1 \quad \Rightarrow \quad S_R^{(i)} = 0. \quad (4.516)$$

---

Rotationshaftung:  $S_n^{(j)} = 1$ ,  $S_R^{(i)} = 1$

---

Eine Linearisierung von (4.476)–(4.478) liefert die Funktionalableitungen

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial (\mathbf{\Lambda}_c)_\mu}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \check{\mathbf{m}} dA^s, \quad (4.517)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathcal{M})}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \mathbf{\Lambda}_c dA^s, \quad (4.518)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \kappa_R \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathcal{M})}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \check{\mathbf{m}} dA^s. \quad (4.519)$$

Weiterhin ergibt sich daraus unter Berücksichtigung von (4.417) und (4.423)

$$\frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c \cdot \delta \check{\mathbf{m}} dA^s, \quad (4.520)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} = - \int_{\Gamma^s} \eta_c p^{(k)} \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \cdot \delta \mathbf{\Lambda}_c dA^s, \quad (4.521)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} = - \int_{\Gamma^s} \kappa_R \eta_c p^{(k)} \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}} \right) \cdot \delta \check{\mathbf{m}} dA^s. \quad (4.522)$$

---

Rotationsreibung:  $S_n^{(j)} = 1$ ,  $S_R^{(i)} = 0$

---

Die Funktionale der Rotationsreibung (4.485)–(4.487) legen auch bei kleinen Rotationen nahe, von dem Hilfsvektor (4.488) Gebrauch zu machen. Die Linearisierungen können damit durch

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{\partial \left( (\Lambda_c)_\mu + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathcal{M}) \right)}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \quad (4.523)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \eta_c p^{(k)} \left[ \frac{\partial (\Lambda_c)_\mu}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{\partial \left( (\Lambda_c)_\mu + h_R \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathcal{M}) \right)}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} \cdot \delta \Lambda_c dA^s, \end{aligned} \quad (4.524)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = 0 \quad (4.525)$$

dargestellt werden. Mit (4.417) und (4.423) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) [\Delta^{(i)} \Lambda_c] \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{h_R}{\Delta t} (\Delta^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}}) \right] \cdot \delta \bar{\mathbf{m}} dA^s, \end{aligned} \quad (4.526)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} &= \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \eta_c p^{(k)} \Delta^{(i)} \Lambda_c \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{1}{h_R} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) [\Delta^{(i)} \Lambda_c] \cdot \delta \Lambda_c dA^s \\ &\quad - \int_{\Gamma^s} \frac{\eta_c p^{(k)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{h}_c^{(i)} \otimes \mathbf{h}_c^{(i)}}{\|\mathbf{h}_c^{(i)}\|^2} \right) \left[ \frac{1}{\Delta t} (\Delta^{(i)} \mathbf{m}^s - \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}}) \right] \cdot \delta \Lambda_c dA^s, \end{aligned} \quad (4.527)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{J}_R}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} = 0. \quad (4.528)$$

Bei kleinen Deformationen führt eine Diskretisierung auf die Interpolationsbeziehungen

$$(\mathbf{u}^s)^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s (\mathbf{u}^s)_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \Delta^{(i)} \mathbf{u}_p^s, \quad \delta \mathbf{u}^s = \sum_{Q=1}^{n(e)} \delta \mathbf{u}_Q^s N_Q^s, \quad (4.529)$$

$$(\check{\mathbf{u}}^m)^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^m (\check{\mathbf{u}}^m)_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^m \Delta^{(i)} \check{\mathbf{u}}_p^m, \quad \delta \check{\mathbf{u}}^m = \sum_{Q=1}^{n(e)} \delta \check{\mathbf{u}}_Q^m N_Q^m, \quad (4.530)$$

$$(\mathbf{m}^s)^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s (\mathbf{m}^s)_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \Delta^{(i)} \mathbf{m}_p^s, \quad \delta \mathbf{m}^s = \sum_{Q=1}^{n(e)} (\delta \mathbf{m}^s)_Q N_Q^s, \quad (4.531)$$

$$\check{\mathbf{m}}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^m \check{\mathbf{m}}_p^{(i)} + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^m \Delta^{(i)} \check{\mathbf{m}}_p, \quad \delta \check{\mathbf{m}} = \sum_{Q=1}^{n(e)} \delta \check{\mathbf{m}}_Q N_Q^m, \quad (4.532)$$

$$\mathbf{p}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \Delta_t^{(i)} \mathbf{p}_p + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \Delta^{(i)} \mathbf{p}_p, \quad \delta \mathbf{p} = \sum_{Q=1}^{n(e)} \delta \mathbf{p}_Q^s N_Q^s, \quad (4.533)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \Delta_t^{(i)} \mathbf{\Lambda}_p + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_p, \quad \delta \mathbf{\Lambda} = \sum_{Q=1}^{n(e)} \delta \mathbf{\Lambda}_Q N_Q^s, \quad (4.534)$$

$$\mathbf{\Lambda}_c^{(i+1)} = \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \left( \Delta_t^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c \right)_p + \sum_{p=1}^{n(e)} N_p^s \left( \Delta^{(i)} \mathbf{\Lambda}_c \right)_p, \quad \delta \mathbf{\Lambda}_c = \sum_{Q=1}^{n(e)} (\delta \mathbf{\Lambda}_c)_Q N_Q^s. \quad (4.535)$$

Ansonsten wird auf den Abschnitt 4.4.4 verwiesen.





## 5 Numerische Beispiele

Bereits einfache Probengeometrien können mit dem in Kapitel 3 beschriebenen mikropolaren Plastizitätsmodell nicht mehr mit vertretbarem Aufwand auf analytischem Wege gelöst werden. Näherungsweise Ergebnisse werden deshalb unter Einsatz von computergestützten Simulationen gewonnen. Für die Lösung spezieller Problemgeometrien wird die Finite-Elemente-Methode eingesetzt. Die Umsetzung der Modellgleichungen im Rahmen dieser Methode ist in Kapitel 4 dokumentiert. Implementiert wurde das Modell in den FE-Programmen *feap* und *Code\_Aster*:

- *feap*: Mikropolare Plastizität für große Deformationen,
- *feap* und *Code\_Aster*: Mikropolare Plastizität für kleine Deformationen,
- *feap*: Mikropolare Plastizität für kleine Deformationen, separate Fließfunktion und Verfestigung,
- *Code\_Aster*: Mikropolares Kontaktmodell für kleine Deformationen.

In Tabelle 5.1 ist ein Satz von Materialparametern angegeben, der bei den meisten Simulationen zum Einsatz kam. Auch in anderen Arbeiten zur mikropolaren Plastizität (vgl. z.B. GRAMME-NOUDIS [27] und MAKRIDIS [58]) wurden die in Tabelle 5.1 aufgelisteten Werte verwendet. Alle Werte für die Materialparameter sind angenommen und nicht etwa durch Optimierungsalgorithmen ermittelt. Daher geben alle folgenden Simulationsergebnisse nur qualitative Informationen über die prinzipiellen Eigenschaften der theoretischen Modellierung an.

Es wird sich im Rahmen dieser Arbeit auf drei Randwertprobleme konzentriert. Man beginnt mit einem weithin bekannten Versuch zu Längenskaleneffekten, dem Torsionsversuch mit unterschiedlich dünnen Drähten. Dann wird die mikropolare Plastizität bei einer Zugbelastung untersucht, wobei auch hierbei Skaleneffekte nachgewiesen wurden, wenn als Probekörper gelochte Platten mit unterschiedlichen Lochradien und äußeren Abmessungen verwendet werden. Bei der Darstellung der Ergebnisse konzentriert man sich auf Simulationen mit dem Materialmodell für große Deformationen. Darüber hinaus wird bei Nebenuntersuchungen, bei

Interne Länge	$l$	$10 \mu m$				
Elastizität	$\lambda$	69000 MPa	$\mu$	46000 MPa	$\alpha$	3000 MPa
	$\beta$	0 N	$\gamma$	0.01 N	$\delta$	0 N
Fließfunktion	$k$	70 MPa	$\alpha_1$	0.75	$\alpha_2$	0.25
			$\alpha_3$	$10000 \text{ mm}^{-2}$	$\alpha_4$	$10000 \text{ mm}^{-2}$
Verfestigung	$\gamma^{(iso)}$	700 MPa	$\beta^{(iso)}$	16		
	$c_1$	600 MPa	$c_2$	80 MPa	$c_3$	0 MPa
	$c_4$	0 N	$c_5$	0.0001 N	$c_6$	0 N
	$b_1$	$0 \text{ MPa}^{-1}$	$b_2$	$0.0025 \text{ MPa}^{-1}$	$b_3$	$0.0025 \text{ MPa}^{-1}$
	$b_4$	$0 \text{ N}^{-1}$	$b_5$	$0.0025 \text{ N}^{-1}$	$b_6$	$0.0025 \text{ N}^{-1}$

**Tabelle 5.1:** Materialparameter der kombinierten isotropen und kinematischen Verfestigung für die Theorie mit einer mikropolaren gekoppelten Fließfunktion

---

denen rein physikalische Effekte im Vordergrund stehen, auf Ergebnisse unter Voraussetzung kleiner Deformationen Bezug genommen.

Bei dem abschließenden Randwertproblem handelt es sich um eine Simulation zur mikropolaren Kontaktheorie. Hierbei wird das Volumenmaterial ausschließlich unter der Voraussetzung kleiner Deformationen simuliert. Um der experimentellen Wirklichkeit zu entsprechen, wäre auch hier die Verwendung von großen Deformationen notwendig. Kontaktrechnungen verlangen jedoch im Vergleich zu Simulationen einfacher Probenvolumina einen wesentlich höheren numerischen Aufwand. Hierbei ist nicht nur die Materialantwort im Volumen iterativ zu lösen, es müssen zusätzlich geometrische Kontaktzustände, Punktprojektionen und Haftungsgrenzen über äußere Programmschleifen bestimmt werden, siehe Abschnitt 4.3.2. Mit der Verwendung kleiner Deformationen konnte hierbei die Simulationsdauer in vertretbaren Grenzen gehalten werden.

---

## 5.1 Torsion von dünnen Drähten

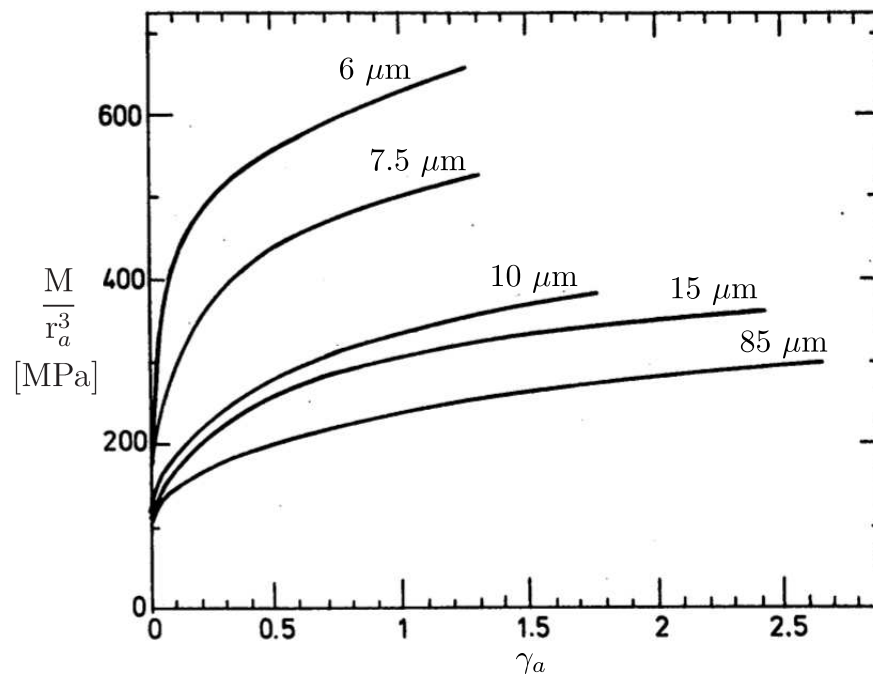
---

Ein wichtiges Experiment bei der Untersuchung von Skaleneffekten ist der Torsionsversuch. Eine deutliche Abhängigkeit der Materialsteifigkeit von der Bauteilgröße wurde von FLECK, MULLER, ASHBY und HUTCHINSON experimentell nachgewiesen und in der Publikation [26] veröffentlicht. Bei der von FLECK et al. verwendeten Versuchsanordnung werden dünne Drähte aus Kupfer mit verschiedenen Durchmessern einer Torsionsbelastung ausgesetzt. Bei der Auswertung wird ein auf den äußeren Probenradius bezogenes Torsionsmoment über der Scherung am Mantel der Drähte aufgetragen (siehe Formel (5.1)) und (5.2). Die Abbildung 5.1 wurde aus der Publikation [26] übernommen. Dargestellt sind die Kurvenverläufe für fünf verschiedene Probenabmessungen von  $85\mu\text{m}$  bis  $6\mu\text{m}$  Radius. Die Messkurven erstrecken sich über einen großen plastischen Deformationsbereich. Man erkennt, dass das bezogene Moment mit einer Reduzierung des äußeren Probenradius ansteigt. Ein solches Verhalten wird als Längenskaleneffekt bezeichnet.

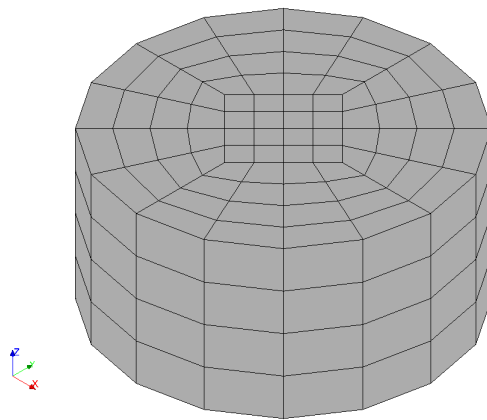
Auch LIU et al. konnten mit eigenen Experimenten die von Fleck beobachteten Skaleneffekte nachweisen. Entsprechende Ergebnisdiagramme sind in der Publikation [54] dokumentiert. In den Experimenten von LIU et al. wurde ebenfalls Kupfer in Form von dünnen Drähten als Probenmaterial verwendet. Simulationen von Mikrotorsionsexperimenten bei mikropolarer Plastizität großer Deformationen sind in GRAMMENOUDIS [27], MAKRIDIS [58], GRAMMENOUDIS und TSAKMAKIS [30] beschrieben.

Bei realen Torsionsexperimenten zum Längenskaleneffekt liegen die Proben hauptsächlich in Form von langen, dünnen Drähten vor. Bei den Simulationen im Rahmen dieser Arbeit wird eine Probengeometrie verwendet, die einen herausgelösten Abschnitt der Drähte repräsentiert. Die Höhe des zylindrischen Abschnitts entspricht dabei dem äußeren Radius. Unabhängig von den Abmessungen besteht das Finite-Elemente-Netz der zylindrischen Probekörper aus 320 Hexaeder-Elementen, deren Eckpunkte durch 445 Knotenpunkte verbunden sind. Die Netztopologie bleibt damit zwischen den Simulationen gleich. In Bild 5.2 ist das Netz in der Ausgangskonfiguration dargestellt.

Zunächst werden fünf Probengrößen simuliert, wobei die Radien in Tabelle 5.2 aufgeführt sind. Man orientiert sich bei der Wahl der Probenradien weitgehend an den Experimenten von FLECK et al. [26]. Auch in den Vorgängerarbeiten [27] und [58] kamen diese Probengrößen zum Einsatz. Für die Auswertung wird ein Drehmoment nach der Formel



**Abbildung 5.1:** Skaleneffekte bei einem Torsionsversuch nach Experimenten von FLECK et al.



**Abbildung 5.2:** Ausgangsnetz für Simulationen einer Torsionsbelastung

Probe 1	6 $\mu\text{m}$
Probe 2	10 $\mu\text{m}$
Probe 3	15 $\mu\text{m}$
Probe 4	85 $\mu\text{m}$
Probe 5	170 $\mu\text{m}$

**Tabelle 5.2:** Radien und Höhen der Probenzylinder

$$M = \int_0^{r_a} T^{<\varphi z>} 2 \pi r^2 dr + \int_0^{r_a} T_c^{<zz>} 2 \pi r dr \quad (5.1)$$

gebildet, wobei sowohl physikalische Komponenten in Bezug auf Zylinderkoordinaten des Cauchy'schen Spannungstensors als auch der Koppelspannungen eingehen. Das Moment  $M$  wird auf die dritte Potenz des Mantelradius  $r_a$  bezogen und über der Mantelscherung  $\gamma_a$ ,

$$\gamma_a = \vartheta r_a, \quad (5.2)$$

aufgetragen. Die Größe  $\vartheta$  stellt dabei die Drillung dar, die sich über die Formel  $\vartheta = \frac{\Delta\Phi}{l_0}$  berechnen lässt, wobei  $\Delta\Phi$  den Drehwinkel der oberen Zylinderfläche und  $l_0$  die Höhe der Zylinderprobe bezeichnet. Im Fall des Zylinders, Bild 5.2, gilt  $l_0 = r_a$ .

Die Belastung wird in Form von DIRICHLET'schen Randbedingungen inkrementell aufgebracht. Dabei wird der mikroskopische Rotationswinkel an jedem der Knoten der oberen Zylinderfläche dem makroskopischen Verdrehwinkel der oberen Fläche gleichgesetzt. Die axialen Vektoren  $\mathbf{m}^0$  (siehe Randbedingung (4.6)) weisen in Richtung der positiven Zylinderachse. Die Größe des Belastungsinkrementes ist so gewählt, dass am Beginn der Simulation zunächst elastische Schritte durchlaufen werden. An der unteren Zylinderfläche werden die Knoten festgehalten und verschwindende Rotationen vorgegeben. Die Mantelfläche des Zylinders ist als Spannungsrand mit verschwindenden Spannungs- und Momentenspannungsvektoren definiert.

Im Verlauf der Simulation wird zuerst in den Elementen an der Mantelfläche das Fließkriterium erreicht. In den folgenden Schritten breitet sich der plastische Bereich nach Innen in Richtung Zylinderachse aus, bis schließlich in jedem Belastungsschritt der Zylinder vollständig plastisch tordiert wird.

---

### 5.1.1 Große Deformationen

---

Diagramm 5.3 fasst die Ergebnisse aus einer Serie von Torsionssimulationen bei großen Deformationen zusammen. Dabei ist ersichtlich, dass sich zwischen den verschiedenen Probenradien im weiteren Verlauf der plastischen Deformationen ein ausgeprägter Längenskaleneffekt einstellt. Das bezogene Drehmoment vergrößert sich dabei deutlich bei einer Verringerung der Zylindergröße. Die Kurvenverläufe der beiden größten Proben mit  $85\mu\text{m}$  und  $170\mu\text{m}$  Radius liegen sehr nah beieinander. Man schließt hieraus, dass mit zunehmendem Probenradius die Längenskaleneffekte abnehmen und die Lösungen der klassischen Theorie angenähert werden. Insgesamt demonstriert Abbildung 5.3, dass das Modell für mikropolare Plastizität großer Deformationen Skaleneffekte zu erfassen.

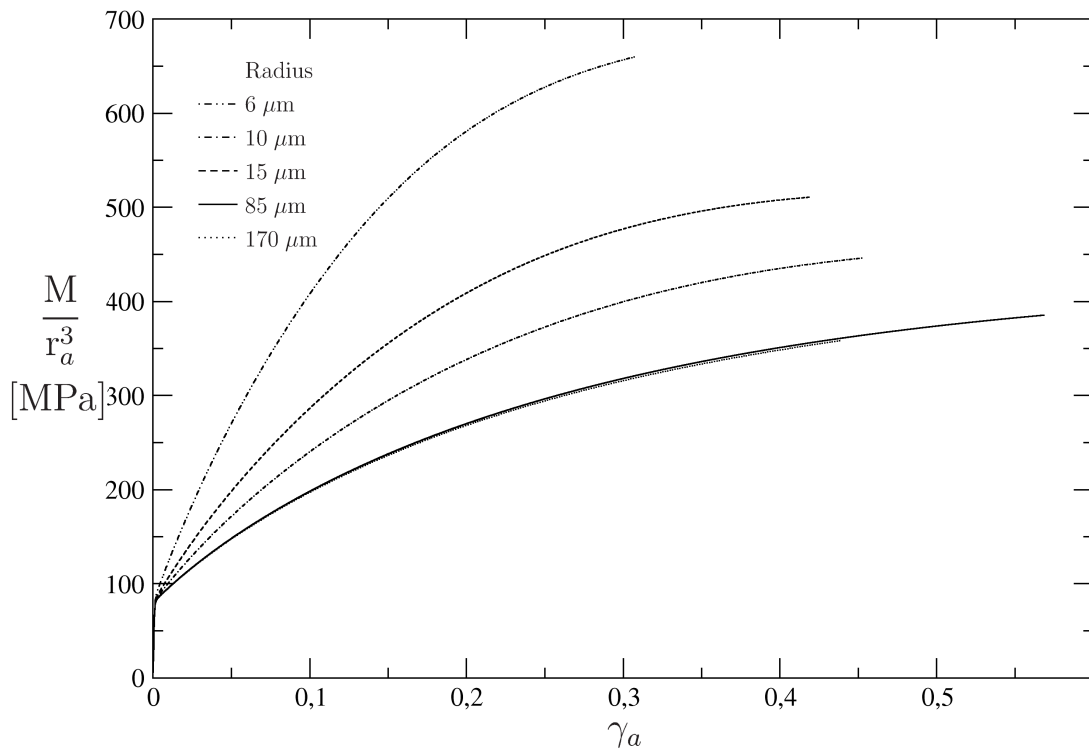
---

### 5.1.2 Kleine Deformationen

---

Die Abhängigkeit von der gesamten Belastungsgeschichte führt zu hohem numerischen Aufwand, der in Zusammenhang mit großen Deformationen sehr lange Rechenzeiten zur Folge hat. Im Gegensatz dazu wirkt sich die Theorie kleiner mikropolarer Deformationen durch eine deutlich verkürzte Rechenzeit aus, die zum Großteil aus einer schnelleren Berechnung der Steifigkeitsmatrix resultiert.

Zunächst werden anhand des Torsionsproblems Lösungen für kleine Deformationen mit den Simulationsergebnissen bei großen Deformationen aus Abschnitt 5.1.1 verglichen. Bis auf die

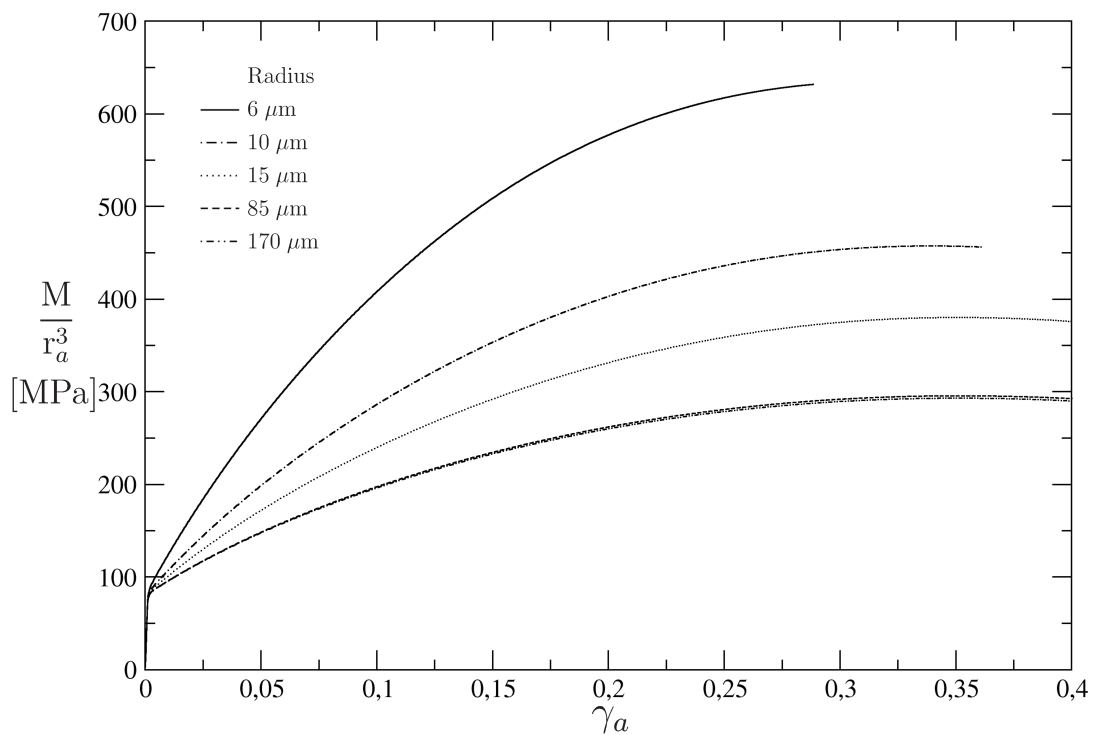


**Abbildung 5.3:** Simulation einer Torsionbelastung bei großen Deformationen. Bezogenes Drehmoment über dem dimensionslosen Scherwinkel.

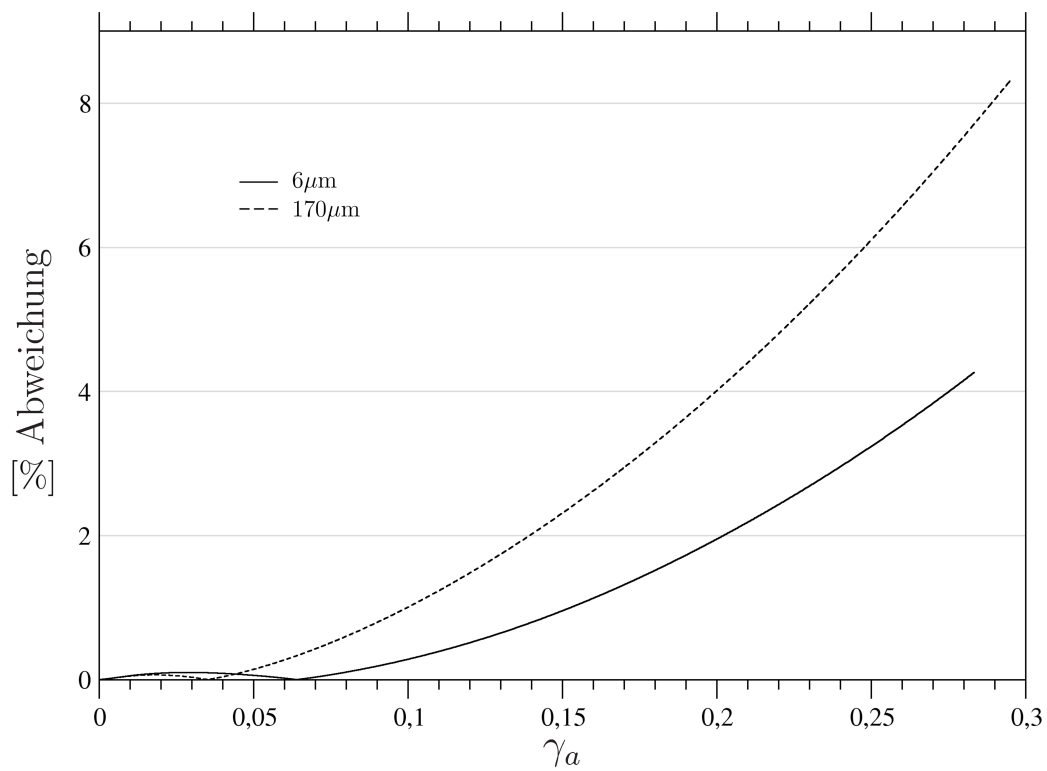
kinematischen Vereinfachungen (geometrische Linearisierung) im Finite-Element selbst sind dabei alle Simulationseingaben identisch. Insbesondere wird wieder von den Materialparametern aus Tabelle 5.1 Gebrauch gemacht.

In Diagramm 5.4 sind die Ergebnisse aus der Vergleichsstudie mit kleinen Deformationen dargestellt. Wieder zeigen die Momentenverläufe ausgeprägte Längenskaleneffekte. Im Unterschied zu den Verläufen in Diagramm 5.3 erhalten die Kurven ab einer bestimmten Scherung eine negative Steigung. In der Plastizität wird ein solches Verhalten als Entfestigung bezeichnet. In dem hier verwendeten Modell ist jedoch keine Entfestigung eingebaut, so dass man ein solches Verhalten als einen Effekt der geometrischen Linearisierung wertet. In Bild 5.5 sind für den jeweils größten und kleinsten Probenradius die abgeschätzten Abweichungen über der Scherung  $\gamma_a$  angegeben. Hierbei fällt die Abweichung bei der kleineren Probe verhältnismäßig kleiner aus als bei der größeren Probe.

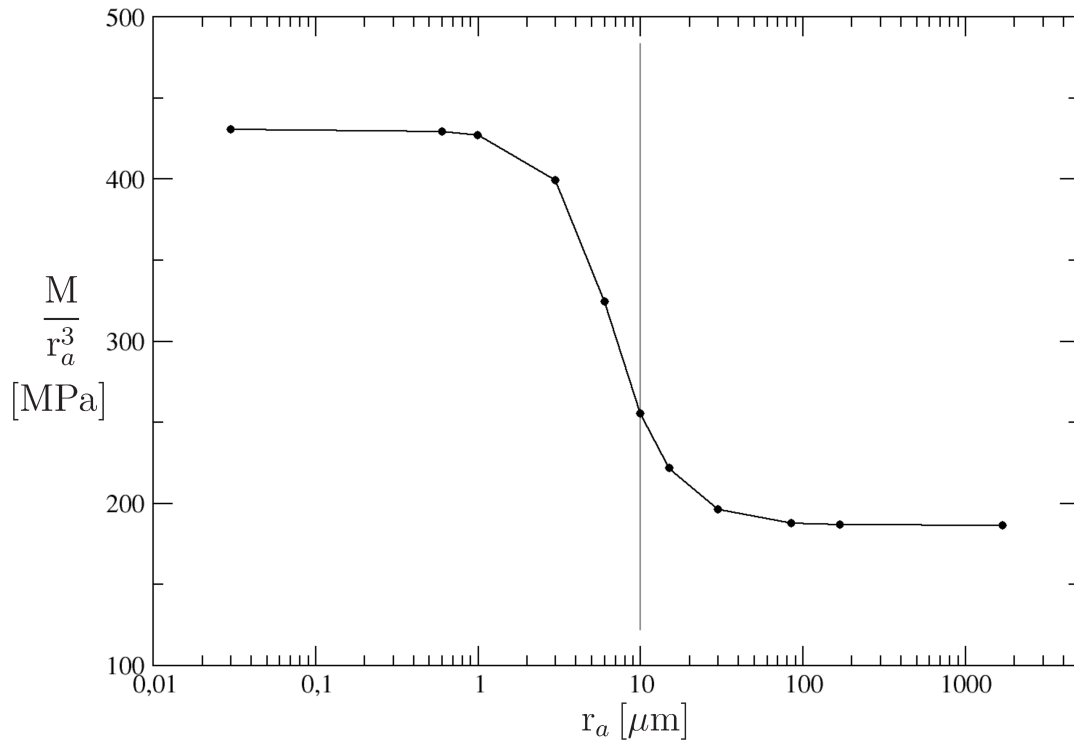
Kurvenschare, wie in Diagrammen 5.3 und 5.4 dargestellt, geben Anlass, das bezogene Moment auch in Abhängigkeit des Probenradius aufzutragen. Hierfür wird willkürlich eine Scherung  $\gamma_a \approx 0.1$  festgelegt, an der das Moment abgelesen wird. Aufgrund der großen Abmessungsdifferenz der Proben wird auf der x-Achse eine logarithmische Skala gewählt. Diagramm 5.6 zeigt das Ergebnis, für das insgesamt elf verschiedene Probenradien simuliert und ausgewertet wurden. Man kann den Verlauf grob in drei Bereiche einteilen. Die Lösungen für die größeren Proben bilden den Bereich rechts, in dem äußere Probenradien wenig Einfluss auf das Moment besitzen. Ähnlich verhalten sich die Momente der kleinsten Proben im linken Bereich, d.h. auch hier ist der Verlauf des bezogenen Momentes annähernd konstant. Im Vergleich zu den größten Probenradien befindet sich das Moment nun allerdings auf einem wesentlich höheren Niveau. Der mittlere Bereich ist gekennzeichnet durch einen starken Anstieg der Momente mit



**Abbildung 5.4:** Torsionssimulationen unter Voraussetzung kleiner Deformationen.



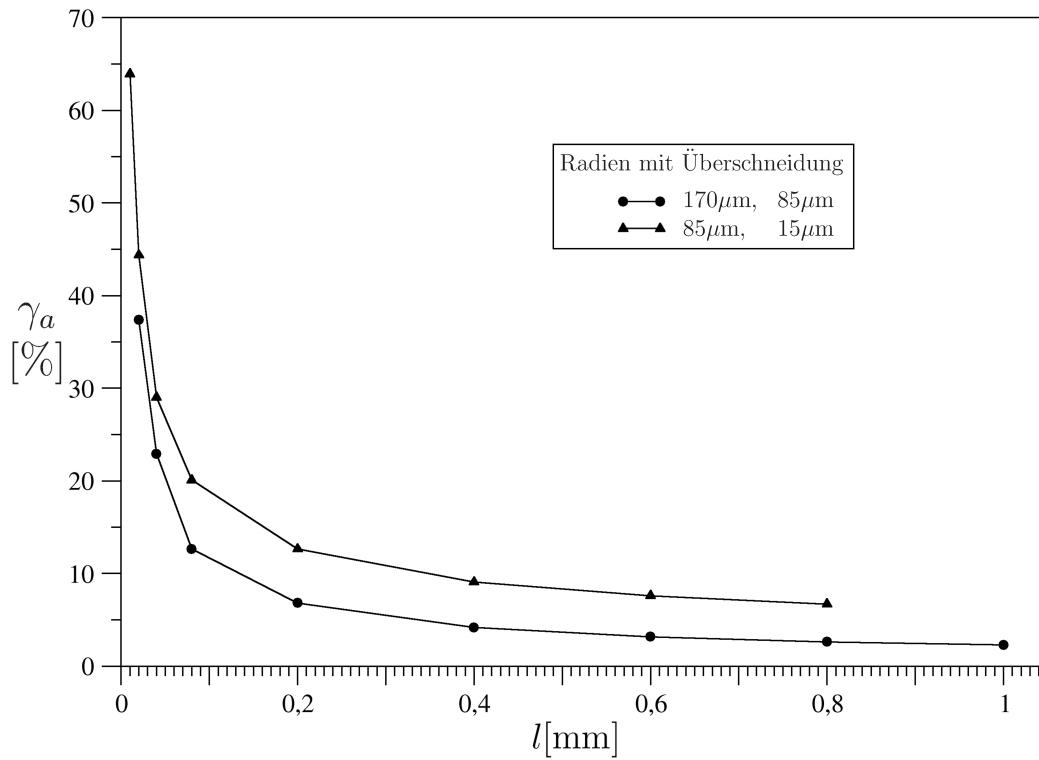
**Abbildung 5.5:** Abweichung bei der Theorie kleiner Deformationen. Als Referenz dienen Ergebnisse aus der Theorie für große Deformationen.



**Abbildung 5.6:** Abhängigkeit des bezogenen Momentes von dem Probenradius bei einer Scherung von  $\gamma_a \approx 0.1$ . An oberer Zylinderfläche gilt  $\mathbf{t}_c = \mathbf{0}$ .

einer Reduzierung des Probenradius. Es ist erkennbar, dass für diese Simulation der Wert der internen Länge  $l$  (in Diagramm 5.6 als graue vertikale Linie dargestellt) innerhalb des mittleren Bereichs liegt, in dem der Größeneffekt am deutlichsten ist.

In früheren Arbeiten, siehe z.B. GRAMMENOUDIS [27], zeigten sich Überschneidungen der Momentenverläufe besonders zwischen größeren Zylinderproben. Ein solches Verhalten entsteht, wenn der Wert der internen Länge  $l$  vergrößert wird, ohne die restlichen Materialkonstanten zu verändern. In einer Testreihe konnte nachgewiesen werden, dass sich bei einer Vergrößerung der internen Länge bei sonst gleichbleibenden Materialkonstanten die Stelle der Überschneidung in Richtung kleinerer Scherungen verschiebt. In Bild 5.7 ist dieser Zusammenhang anhand eines Diagramms dargestellt. Auf der x-Achse ist der Wert der internen Länge  $l$  aufgetragen, der Überschneidungspunkt ist dann in Form der Scherung  $\gamma_a$  auf der y-Achse abzulesen. In Diagramm 5.7 werden jeweils zwei Schnittpunktverläufe dargestellt. Messwerte von Schnittpunkten zwischen Proben mit  $r_a = 85\mu\text{m}$  und  $r_a = 15\mu\text{m}$  sind durch Dreiecke markiert, Schnittpunkte zwischen  $r_a = 170\mu\text{m}$  und  $r_a = 85\mu\text{m}$  mit Kreisscheiben. Zur Verdeutlichung des Verlaufs sind die Messpunkte mit Geraden verbunden. Bei einer Verringerung der internen Länge  $l$  vergrößert sich die Scherung überproportional, bei der sich Momentenverläufe überschneiden. Beispielsweise mißt man für eine interne Länge  $l = 1\text{mm}$  eine Überschneidung der Momentenverläufe zwischen den Proben mit Radien  $r_a = 170\mu\text{m}$  und  $r_a = 85\mu\text{m}$  bereits bei unter 5 % Scherung, während bei einer reduzierten internen Länge von  $l = 10\mu\text{m}$  für beide Zylinderabmessungen die Überschneidung so weit verschoben ist, dass sie im gesamten simulierten Deformationsbereich gar nicht mehr auftritt. Die Ergebnisse legen die Vermutung nahe, dass bei einer endlichen internen Länge  $l$  immer Überschneidungen der Momentenverläufe existieren.

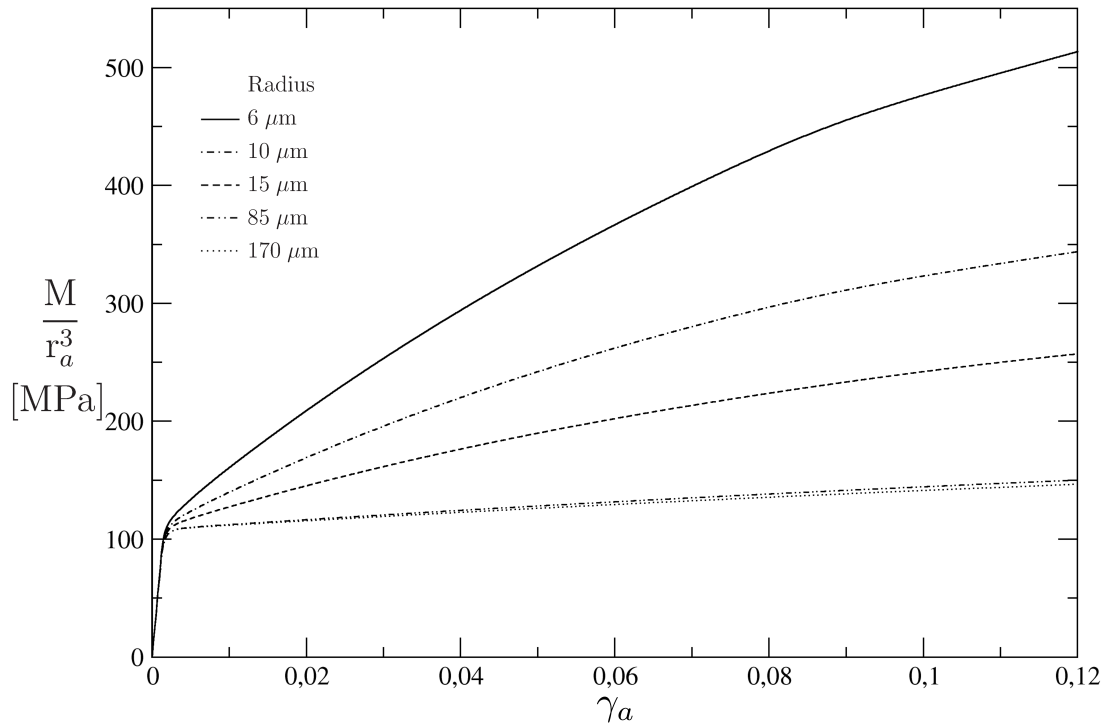


**Abbildung 5.7:** Abhängigkeit des Überschneidungspunktes von der internen Länge  $l$ . Der Überschneidungspunkt wird durch die Scherung am äußeren Radius angegeben.

Interne Länge	$l$	$10 \mu m$				
Elastizität	$\lambda$	69000 MPa	$\mu$	46000 MPa	$\alpha$	1000 MPa
	$\beta$	0 N	$\gamma$	0.04 N	$\delta$	0 N
Fließfunktion	$k$	93 MPa	$\alpha_1$	0.75	$\alpha_2$	0
			$\alpha_3$	10000 mm <sup>-2</sup>	$\alpha_4$	0 mm <sup>-2</sup>
Verfestigung	$\gamma^{(iso)}$	120 MPa	$\beta^{(iso)}$	1		
	$c_1$	0 MPa	$c_2$	120 MPa	$c_3$	0 MPa
	$c_4$	0 N	$c_5$	0.003 N	$c_6$	0 N
	$b_1$	0 MPa <sup>-1</sup>	$b_2$	0.001 MPa <sup>-1</sup>	$b_3$	0 MPa <sup>-1</sup>
	$b_4$	0 N <sup>-1</sup>	$b_5$	0.001 N <sup>-1</sup>	$b_6$	0 N <sup>-1</sup>

**Tabelle 5.3:** Gekoppelte Fließfunktion, abweichender Satz von Materialparametern.





**Abbildung 5.8:** Simulationsergebnisse für Torsion bei kleinen Deformationen und gemischter Fließfunktion mit isotroper und kinematischer Verfestigung. Die Dehnung  $\epsilon_p$  ist symmetrisch.

Eine deutlich verkürzte Rechenzeit bei kleinen Deformationen erlaubt es auch, Materialparameterdiskussionen durchzuführen. Es soll hier eine vom Standardsatz abweichende Parameterkombination angegeben werden, Tabelle 5.3. Eine Besonderheit ist hierbei die Wahl  $\alpha_2 = 0$  für die Materialkonstante, die innerhalb der Fließfunktion den Beitrag der antisymmetrischen Cauchy'schen Spannungsanteile bestimmt. Aus der Normalenregel, Gleichung (3.131), folgt dann die Symmetrie  $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_p^T$ . In einem Kontext von großen Deformationen impliziert dies wiederum Gleichung (2.103). In Diagramm 5.8 ist das Ergebnis für fünf verschiedene Probengrößen dargestellt. Der Längenskaleneffekt ist demnach auch unter der Voraussetzung  $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_p^T$  deutlich zu erkennen.

Der erweiterte Parametersatz für separate mikropolare Plastizität ist in Tabelle 5.4 angegeben. Die Simulationsergebnisse für den Fall isotroper und kinematischer Verfestigung mit entkoppelter Fließfunktion werden in Diagramm 5.9 dargestellt. Die Punkte, an denen die verschiedenen Grenzfließspannungen erreicht werden, sind an den Kurvenverläufen deutlich zu erkennen. Zunächst wird nach einer kleinen elastischen Deformation das makroskopische Fließkriterium erreicht. Hierbei weisen die Kurvenverläufe einen ersten Knick auf. Nach einem makroskopischen Verfestigungsabschnitt knicken die Kurven erneut ab, wobei sich die Steigung des bezogenen Momentes weiter verringert.

## 5.2 Lochplatte unter Zugbelastung

Um bei Zugversuchen einen messbaren Größeneffekt zu erzeugen, muss nicht nur die Probengröße verändert werden, es müssen zudem Inhomogenitäten im Deformationszustand die Bil-

Interne Länge	$l$	10 $\mu\text{m}$				
Elastizität	$\lambda$	69000 MPa	$\mu$	46000 MPa	$\alpha$	1000 MPa
	$\beta$	0 N	$\gamma$	0.04 N	$\delta$	0 N
Fließfunktion	$k$	93 MPa	$\alpha_1$	0.75	$\alpha_2$	0
	$k_c$	18 MPa	$\alpha_3$	10000 $\text{mm}^{-2}$	$\alpha_4$	0 $\text{mm}^{-2}$
Verfestigung	$\gamma^{(iso)}$	120 MPa	$\beta^{(iso)}$	1		
	$\gamma_c^{(iso)}$	30 MPa	$\beta_c^{(iso)}$	1		
	$c_1$	0 MPa	$c_2$	120 MPa	$c_3$	0 MPa
	$c_4$	0 N	$c_5$	0.003 N	$c_6$	0 N
	$b_1$	0 $\text{MPa}^{-1}$	$b_2$	0.001 $\text{MPa}^{-1}$	$b_3$	0 $\text{MPa}^{-1}$
	$b_4$	0 $\text{N}^{-1}$	$b_5$	0.001 $\text{N}^{-1}$	$b_6$	0 $\text{N}^{-1}$

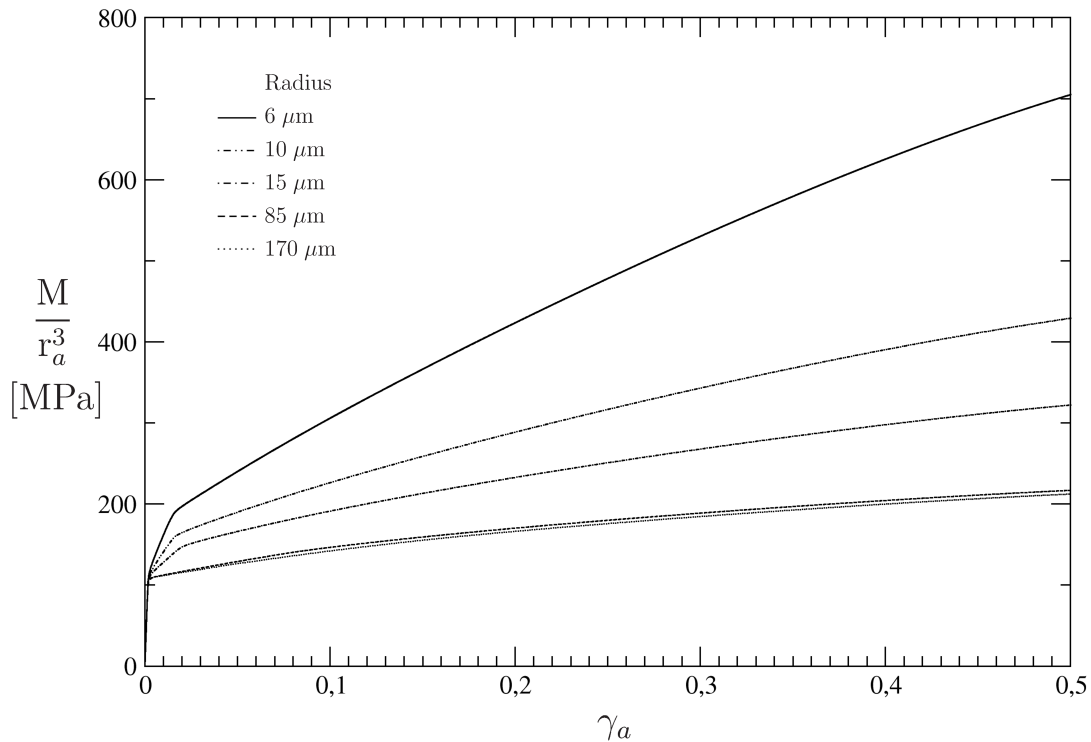
**Tabelle 5.4:** Separate Fließfunktionen.

lfd Nr.	Lochradius
Probe 1	10 nm
Probe 2	100 nm
Probe 3	1,7 $\mu\text{m}$
Probe 4	5 $\mu\text{m}$
Probe 5	17 $\mu\text{m}$
Probe 6	50 $\mu\text{m}$
Probe 7	5 mm

**Tabelle 5.5:** Lochradien der Zugproben.

dung von mikroskopischen Rotationsgradienten herbeiführen. Eine konstruktive Massnahme, die diese Vorgabe erfüllt, ist eine Platte mit einer Bohrung als Zugprobe zu verwenden. Geometrische Proportionen sowie Vernetzung der Lochplatten, sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Die verschiedenen Abmessungen der Bohrungen können Tabelle 5.5 entnommen werden. Die Länge der Zugprobe entspricht jeweils dem 24-fachen, die Breite dem 10-fachen und die Dicke dem 4-fachen des Lochradius. Die Vernetzung der Platte besteht aus 192 Hexaederelementen. Die unteren Knoten sind fest eingespannt. An den oberen Knoten werden Verschiebungssinkremente in positiver z-Richtung vorgegeben. An der unteren Plattenfläche werden alle Knoten bezüglich der Verschiebungen  $\mathbf{u}^0$  festgehalten. Die axialen Vektoren  $\mathbf{m}^0$  werden an der oberen und unteren Plattenfläche zu Null gesetzt. Auf dem restlichen Rand herrschen verschwindende Spannungs- und Momentenspannungsvektoren. Wie schon im Fall der Torsionsexperimente werden die Schrittweiten so gewählt, dass fünf bis zehn elastische Lösungsschritte den Beginn der Simulation bilden. Das Fließkriterium wird erst nach dieser Startphase in mindestens einem Element des gesamten Netzes erreicht.

Man beschränkt sich bei der Auswertung der Simulationsergebnisse auf **große Deformationen**. In Abbildung 5.11 sind die Verläufe der Lochaufweitung  $w = (r - r_0) / r_0$  in Zugrichtung in Abhängigkeit der Gesamtdehnung  $e = (l - l_0) / l_0$  für drei verschiedene Lochradien und Plattenabmessungen aufgetragen (r: Radius des Loches,  $r_0$ : Ausgangsradius des Loches, l: Länge der Platte,  $l_0$ : Ausgangslänge der Platte). Man erkennt, je kleiner die Abmessungen der Zugprobe, desto weniger weitet sich die anfangs kreisrunde Bohrung im Verhältnis auf. Dieser Effekt ist umso deutlicher, je größer die Gesamtdehnung ist.



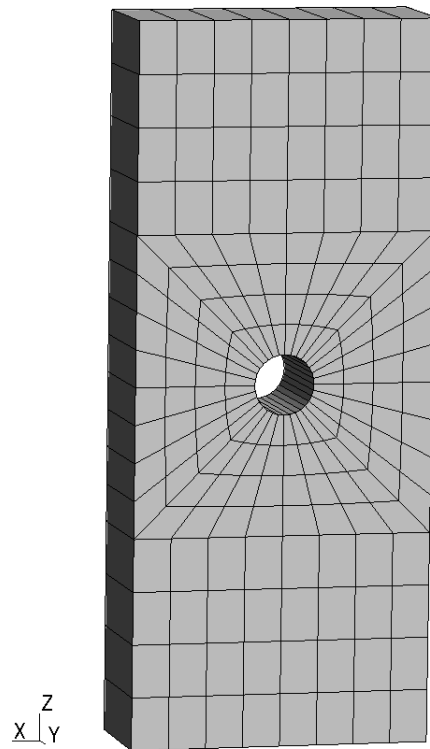
**Abbildung 5.9:** Torsion bei kleinen Deformationen mit separaten Fließfunktionen und kombinierter isotroper und kinematischer Verfestigung.

Diagramm 5.12 stellt die Lochaufweitung  $w$  in Abhängigkeit des Anfangsradius der Bohrung dar. Die Werte wurden bei einer Gesamtdehnung  $e$  von 0,03 abgelesen. Interessant ist, dass der Verlauf in Diagramm 5.12 wie im Fall der Torsion in drei Bereiche aufgeteilt werden kann. Rechts, im Bereich großer Proben mit über  $40 \mu\text{m}$  Bohrungsradius sind die Unterschiede der Lochaufweitung sehr gering. Im mittleren Bereich zwischen einem Radius von  $40 \mu\text{m}$  bis  $100 \mu\text{m}$  fällt die Lochaufweitung stark ab. Die Messwerte für die kleinsten Proben bilden dann den linken, dritten Bereich. Hier bleibt die Lochaufweitung wieder annähernd konstant, so dass Größenunterschiede wie im Bereich der größten Proben wenig Einfluss besitzen. Zusätzlich wurde an der Stelle  $r_0 = 10 \mu\text{m}$  durch eine vertikale Linie die interne Länge  $l$  des simulierten Materials gekennzeichnet. Der Wert der internen Länge  $l$  liegt im mittleren Bereich, wo der Größeneffekt am deutlichsten ist.

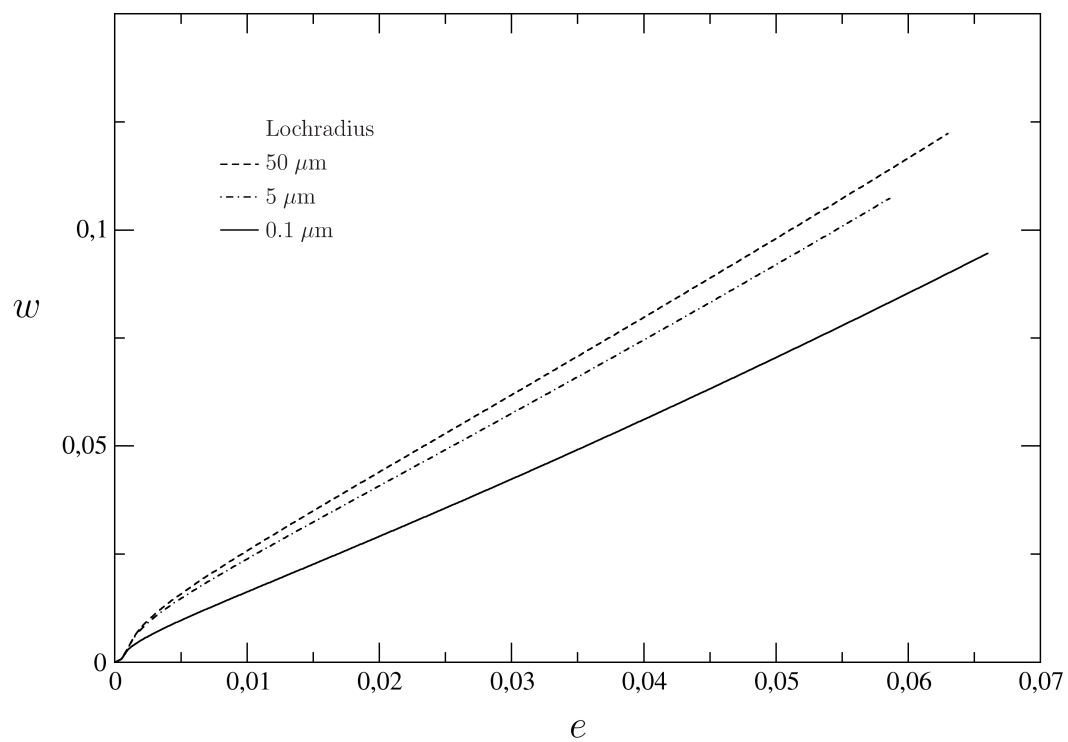
### 5.3 Simulation einer Eindruckbelastung

Für das mikropolare Kontaktmodell soll nun der Nachweis erbracht werden, dass Simulationen in Verbindung mit einem mikropolar plastischen Volumenmaterial durchführbar sind. Insbesondere wird hierbei gezeigt, dass die Nebenbedingungen für Normalkontakt, tangentielle Reibung und erweiterten rotatorischen Reibungskontakt eingehalten werden. Aufgrund einer begrenzten Rechenleistung wurde für diese Studie die **Theorie kleiner mikropolarer Deformationen** für Volumen- und Kontaktmaterial verwendet.

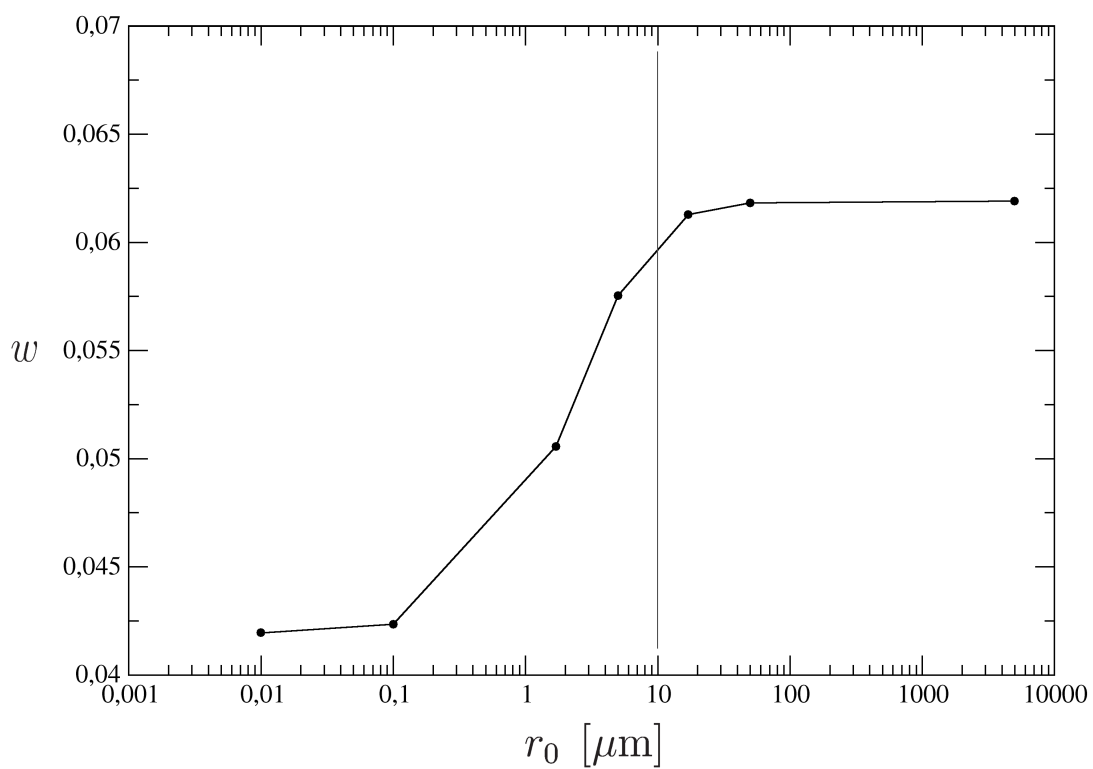
Auf die zum Teil sehr komplexen Mechanismen (siehe z.B. TABOR [76], SWADENER, GEORGE und PHARR [75]), die bei Eindruckversuchen besonders im Bereich sehr kleiner Problemabmessungen das mechanische Verhalten beeinflussen, soll hier nicht eingegangen werden. Aus diesem



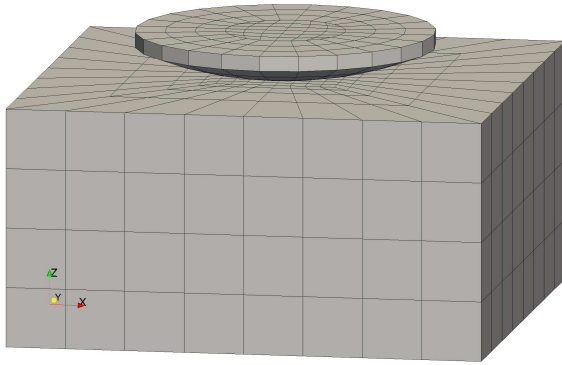
**Abbildung 5.10:** Vernetzung der Lochplatte



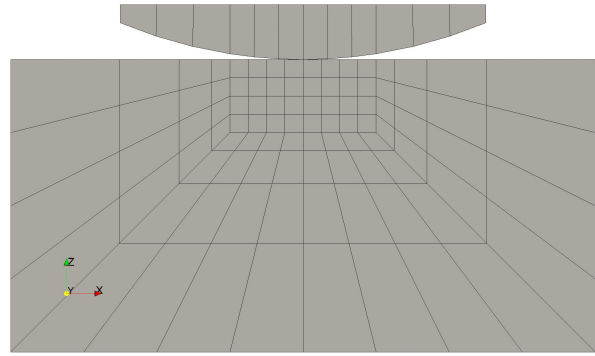
**Abbildung 5.11:** Die Lochaufweitung  $w$  über der Dehnung  $e$  für drei verschiedene Lochradien  $r$ .



**Abbildung 5.12:** Vergleich der Lochaufweitung  $w$  über verschiedene Lochradien  $r_0$  bei 10% Dehnung. Die interne Länge  $l$  ist durch eine vertikale Linie markiert.



(a) Perspektivische Ansicht



(b) Schnittansicht

**Abbildung 5.13:** Problemgeometrie und Vernetzung bei der Simulation eines Eindruckversuchs.

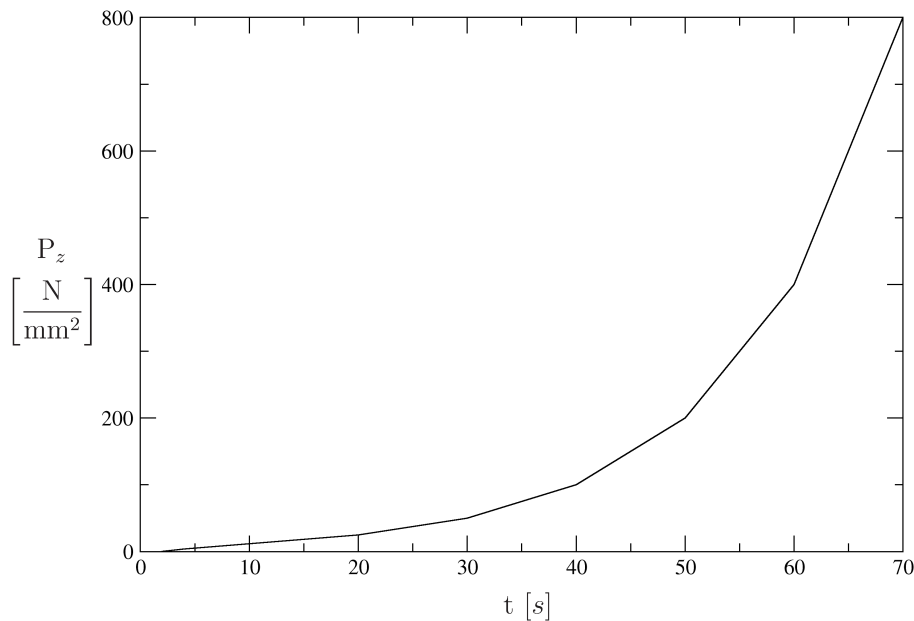
Interne Länge	$l$	10 $\mu\text{m}$				
Elastizität	$\lambda$	69000 MPa	$\mu$	46000 MPa	$\alpha$	3000 MPa
	$\beta$	0 N	$\gamma$	0.01 N	$\delta$	0 N
Fließfunktion	$k$	70 MPa	$\alpha_1$	0.75	$\alpha_2$	0.25
			$\alpha_3$	10000 $\text{mm}^{-2}$	$\alpha_4$	10000 $\text{mm}^{-2}$
Verfestigung	$\gamma^{(iso)}$	700 MPa	$\beta^{(iso)}$	16		
	$c_1$	600 MPa	$c_2$	80 MPa	$c_3$	0 MPa
	$c_4$	0 N	$c_5$	0.0001 N	$c_6$	0 N
	$b_1$	0 $\text{MPa}^{-1}$	$b_2$	0.0025 $\text{MPa}^{-1}$	$b_3$	0.0025 $\text{MPa}^{-1}$
	$b_4$	0 $\text{N}^{-1}$	$b_5$	0.0025 $\text{N}^{-1}$	$b_6$	0.0025 $\text{N}^{-1}$
Kontakt			$h_p$	100 $\text{N}/\text{mm}^3$	$\kappa_n$	100 $\text{N}/\text{mm}^3$
	$\eta$	0.4	$h_T$	100 s/mm	$\kappa_T$	100 s/mm
	$\eta_c$	0.00008 mm	$h_R$	100 s	$\kappa_R$	100 s
			$\rho_T$	100 s/mm	$\rho_R$	100 s

**Tabelle 5.6:** Materialparameter der kombinierten isotropen und kinematischen Verfestigung für die Theorie mit einer gekoppelten Fließfunktion. Erweiterung mit den Parametern für das Kontaktmodell.

Grund ist die Simulation des Eindruckversuchs nicht dazu gedacht, reale Experimente nachzubilden oder Vorhersagen für spezielle Versuchsaufbauten und Materialkombinationen zu geben.

Das Netz, das für die Eindrucksimulation verwendet wurde, ist in Abbildung 5.13 jeweils perspektivisch (5.13a) und im Schnitt (5.13b) dargestellt. Oberer und unterer Körper bestehen zusammen aus 1132 Hexaederelementen. Die untere Randfläche des oberen Körpers ist sphärisch gewölbt. Willkürlich wurde für die Simulation ein Radius dieser Fläche von  $13\mu\text{m}$  gewählt. Es wird noch einmal betont, dass die beschriebene Netzgeometrie keinem realen Experiment nachempfunden wurde. Aufgrund der gegebenen Rechenleistung wurde von einer feineren Vernetzung abgesehen, so dass die Simulationsdauer in Grenzen gehalten werden konnte.

Die sphärische Kontaktfläche des oberen Körpers wurde als *master*-Fläche definiert. Die obere Fläche des unteren Körpers wird als *slave*-Fläche gewählt und stellt damit die Kontaktschicht dar (zur Wahl von *master*- und *slave*-Flächen siehe DE SOZA [18]).



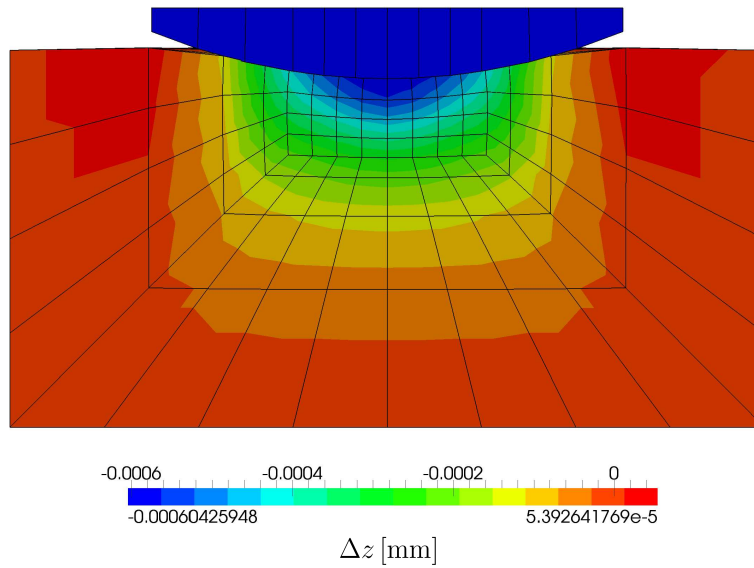
**Abbildung 5.14:** Last-Zeit-Funktion an der ebenen Kreisfläche des oberen Eindringkörpers.

Als Materialparameter wurden grundsätzlich wieder die Werte aus den vorherigen Simulationen verwendet (Tabelle 5.1), wobei dieser Parametersatz nun durch die Kontaktparameter erweitert wurde, siehe Tabelle 5.6. Hierbei stellen die Werte für  $\eta$  und  $\eta_c$  jeweils Reibkoeffizienten eines fiktiven Kontaktmaterials dar. Der obere Körper wird im Sinne eines sehr harten Indenters als starr angenommen. Der untere Block stellt den Probekörper dar und wird durch die in der Tabelle 5.6 angegebenen Konstanten für das Volumenmaterial charakterisiert.

An allen Randflächen bis auf die obere *slave*-Fläche des unteren Körpers werden die Knoten in allen Richtungen bezüglich der Verschiebungen festgehalten. Als mikroskopische Randbedingung wurde an diesen Flächen ein Spannungsrand mit verschwindenden Momentenspannungsvektoren gewählt.

An dem oberen Körper wird an jedem Knoten der oberen ebenen Fläche eine äußere Kraft in vertikaler Richtung inkrementell aufgebracht. Die Last-Zeit-Funktion ist in Diagramm 5.14 wiedergegeben. Die Last ist dabei anhand des mittleren Druckes  $P_z$  auf die obere Kreisfläche gegeben. Außerdem wird eine Verschiebung dieser Knoten in horizontaler Richtung durch DIRICHLET'sche Randbedingungen verhindert. Mikroskopische Rotationsvektoren werden an dieser Fläche ebenfalls zu Null gesetzt.

In einer Schnittansicht sind die Verschiebungen in  $z$ -Richtung, also in Richtung der Bewegung des oberen Körpers, dargestellt, siehe Bild 5.15. Der Betrag der Verschiebung ist farblich gekennzeichnet. Hierbei werden auch Verschiebungen entgegen der Druckrichtung gemessen, erkennbar an den tief roten Bereichen vor allem links und rechts dicht neben dem Eindrucksbereich. Diese Anhäufungen (engl. *pile ups*) sind Merkmale von plastischem Materialverhalten. Anhand von Bild 5.15 lässt sich darüber hinaus überprüfen, ob Durchdringungen zwischen den Kontaktkörpern existieren. Dabei konnten auch bei starker Vergrößerung des Bereiches der Kontaktschicht keine Überschneidungen festgestellt werden.



**Abbildung 5.15:** Verschiebungsfeld in z-Richtung.

Die Feldgrößen des Reibungskontaktes  $p$ ,  $\Lambda$  und  $\Lambda_c$  werden jeweils den Knoten der *slave*-Kontaktfläche des unteren Körpers zugeordnet, so dass die Darstellung der Lösungsfelder auf dieses Gebiet beschränkt bleibt.

In Abbildung 5.16a ist die Flächenverteilung des Kontaktdruckes  $p$  am Ende der Belastungsphase bei  $t = 70s$  dargestellt. Farblich gekennzeichnete Quadrate geben den Wert des Knotendruckes an. An dunkelblauen Quadraten herrscht gemäß der verwendeten Farbskala ein verschwindender Druck. Das periodisch rotationssymmetrische Muster in der Farbverteilung ist vermutlich auf die sehr grobe Netzstruktur zurückzuführen, wobei unmittelbar ersichtlich ist, dass eine solche Druckverteilung mit keiner realen, experimentell bestimmten Druckverteilung vergleichbar ist. Für solche Vergleiche müsste ein wesentlich feineres Netz sowohl für das Volumen als auch die Kontaktschicht verwendet werden.

An Hand von  $\|\Lambda\|$ , Bild (5.16b), lässt sich ablesen, ob an einem Knoten Haftung oder Reibung vorliegt. Besitzt  $\Lambda$  eine Länge von eins,  $\|\Lambda\| = 1$ , dann herrscht an diesem Knoten ein Reibungskontakt oder Grenzhaftung. Ist der Betrag kleiner,  $\|\Lambda\| < 1$ , dann haften an diesem Knoten die Körper aufeinander. Aus Auswertungen, die hier nicht dargestellt sind, ist ersichtlich, dass fast ausschließlich Reibungskontakt über den gesamten Verlauf der Simulation vorherrscht. Erst bei sehr großer Last bilden sich Haftungsgebiete in der Mitte der Kontaktfläche, wie es in Bild (5.16b) am Ende der Simulation wiedergegeben ist.

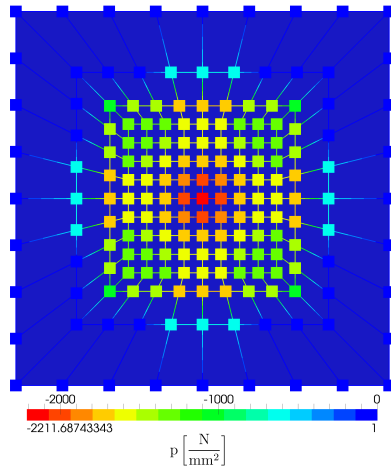
Sei  $\tilde{\mathbf{t}}_T := \mathbf{j} \mathbf{t}_T$  gewichteter Spannungsvektor in der Kontaktfläche. Die Verteilung von  $\|\tilde{\mathbf{t}}_T\|$  kann nun aus dem Kontaktdruck und  $\|\Lambda\|$  unter Berücksichtigung von Gleichung (4.180) an jedem Knoten bestimmt werden:

$$\|\tilde{\mathbf{t}}_T\| = \eta |p| \|\Lambda\|. \quad (5.3)$$

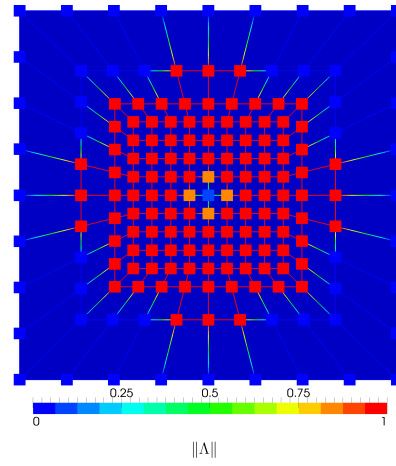
Die Berechnung dieser Größen wird innerhalb des *post-processing* im Anschluss an die Simulation durchgeführt. In Bild 5.16c ist das Ergebnis dieser Operation dargestellt.

Wie im Fall der Verteilung von  $\Lambda$  steht auch die Verteilung von  $\Lambda_c$  unmittelbar als Knotenlösungen für eine Analyse zur Verfügung, siehe Bild 5.16d. Der Reibungsfall liegt genau dann

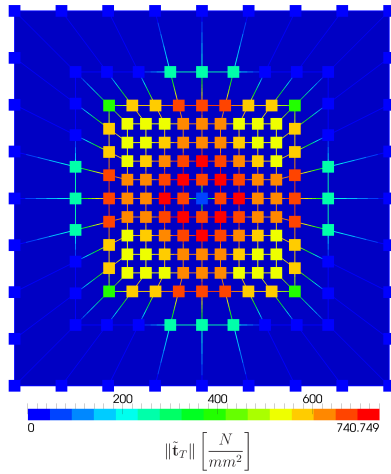




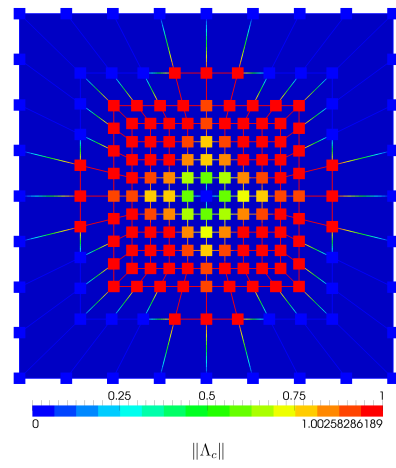
(a) Verteilung von  $p$ .



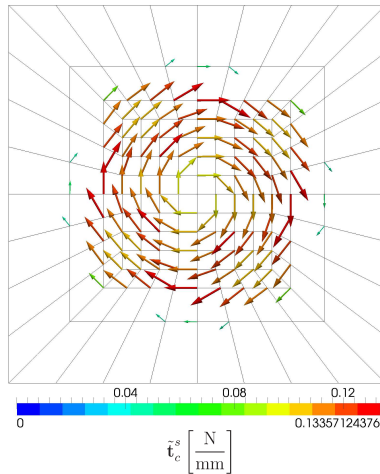
(b) Verteilung von  $\|\Lambda\|$ .



(c) Verteilung von  $\|\tilde{t}_T\|$ .



(d) Verteilung von  $\|\Lambda_c\|$ .



(e) Verteilung von  $\tilde{t}_c^s$ .

**Abbildung 5.16:** Feldlösungen für die Kontaktzwischenschicht am Ende der Simulation bei  $t = 70s$  und  $P_z = 800N/mm^2$ . Blickrichtung von oben.

an einem Kontaktknoten vor, wenn der diesem Knoten zugeordnete Vektor  $\Lambda_c$  die Einheitslänge besitzt, d.h.  $\|\Lambda_c\| = 1$ . Am zentralen Knoten verschwindet der Betrag von  $\Lambda_c$  über die gesamte Simulationsdauer. Über den Verlauf der Simulation herrscht meist rotatorischer Reibungskontakt mit  $\|\Lambda_c\| = 1$  an den Kontaktknoten vor, wobei auch diese Kenntnisse aus Simulationsergebnissen gewonnen wurden, die hier nicht dargestellt werden. Erst am Ende der Simulation bei stark ausgeweitetem Kontaktbereich erhält man in der Umgebung des zentralen Knotens einen ausgeprägten Haftbereich, in dem  $\|\Lambda_c\| < 1$  gilt. Dieses Feld ist in Bild 5.16d wiedergegeben.

Die Verteilung der Momentenspannungsvektoren am Ende der Simulation ist in Bild 5.16e dargestellt. Mit  $\Lambda_c$  lassen sich die Momentenspannungsvektoren nach der Gleichung (4.242) bestimmen:

$$\tilde{\mathbf{t}}_c^s = \eta_c \mathbf{p} \Lambda_c, \quad (5.4)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{t}}_c^s = j \mathbf{t}_c^s$  gewichtete Momentenspannungsvektoren darstellen. Da es sich bei den Momentenspannungsvektoren um axiale Vektoren handelt, kann mit ihrer Richtung z.B. nach der Regel der rechten Hand ein Drehsinn verbunden werden. Die Vektoren sind dabei konzentrisch um den mittleren Knoten angeordnet. Denkt man sich Kreise um diesen Knoten, dann zeigen die Vektoren vornehmlich in Umfangsrichtung der Kreise.

---

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

---

In dieser Arbeit wurde eine mikropolare Theorie zur Modellierung von Längenskaleneffekten in der Mechanik vorgestellt. Das Materialmodell wurde bezüglich großer und kleiner Deformationen entwickelt und enthält eine neue Formulierung einer nicht-kompatiblen mikropolaren Plastizität. Unter anderem ist die Theorie durch eine besondere Struktur des Mandel'schen Spannungstensors gekennzeichnet. Darüber hinaus wurde eine neue mikropolare Kontakttheorie entwickelt. Alle Modellformulierungen erfüllen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und sind damit thermodynamisch konsistent.

Das Plastizitätsmodell berücksichtigt sowohl isotrope als auch kinematische Verfestigung. Es wurden Versionen der Theorie mit einer einheitlichen Fließfunktion sowie mit zwei Fließfunktionen, die separaten makro- und mikroskopischen Effekten Rechnung tragen, entwickelt und untersucht. Das Kontaktmodell enthält eine besondere Formulierung der klassischen COULOMB'schen Reibung, die erstmals auf mikropolare Reibung verallgemeinert wurde. Im Rahmen dieses Ansatzes wurde von der exakten Erfüllung der Haftungsbedingung auch für relative Rotationsgeschwindigkeiten ausgegangen.

Das Plastizitätsmodell bezüglich der Körpervolumina wurde in den FE-Programmen *feap* und *Code\_Aster* implementiert. Für Simulationen mikropolarer Kontaktprobleme wurde ausschließlich *Code\_Aster* verwendet.

Es wurden insgesamt drei verschiedene Randwertprobleme mit den hier entwickelten Materialmodellen am Computer simuliert. Alle numerischen Beispiele haben qualitativen Charakter und basieren auf angenommenen Materialparametersätzen. Nichtsdestotrotz konnten die Rechnungen ohne Kontakt demonstrieren, dass das Modell grundsätzlich in der Lage ist, Längenskaleneffekte wiederzugeben. Was Kontaktprobleme angeht, so war das primäre Ziel, eine Theorie und ihre numerische Umsetzung herauszuarbeiten. Dies ist auch gelungen, wie man anhand des gerechneten Beispiels erkennen kann. Eine genauere Studie des Kontaktalgorithmus mittels feinerer Netze verlangt viel mehr Zeit und geht über den Rahmen dieser Dissertation hinaus.

Im ersten numerischen Beispiel wurde eine Torsionsbelastung berechnet. Aus realen Experimenten ist bekannt, dass unterschiedlich dünne Drähte unter einer Torsionslast deutliche Längenskaleneffekte aufweisen. Es wurde gezeigt, dass mit dem hier entwickelten mikropolaren Plastizitätsmodell solche Skaleneffekte reproduziert werden können. Eine Auswertung ergab einen Anstieg eines bezogenen Drehmomentes bei einer Reduzierung des Probendurchmessers. Darüber hinaus wurde der Einfluss einer internen Länge untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass bei Probenradien im Bereich der internen Länge der Anstieg des bezogenen Momentes und damit der Skaleneffekt am größten ist.

Im zweiten numerischen Beispiel wurden Simulationen gelochter Platten im Zugversuch durchgeführt. Für eine Untersuchung von Skaleneffekten wurden jeweils Platten mit unterschiedlichen Abmessungen verwendet. Ausgewertet wurde die relative Deformation des am Anfang kreisrunden Loches in Plattenmitte. Die hierbei eingesetzte Modellformulierung für große Deformationen lieferte das deutliche Ergebnis, dass kleinere Lochabmessungen und Plattengrößen zu einer geringeren Lochdeformation führen. Es konnte darüber hinaus gezeigt werden, dass die Änderung der relativen Lochdeformation vergleichsweise groß ist, wenn sich der Ausgangsradius im Bereich einer internen Länge des Materialmodells befindet.

---

Die letzte Simulation diente der Untersuchung des hier entwickelten mikropolaren Kontaktmodells. Das gewählte Randwertproblem modelliert einen Eindruckversuch, wobei ein sphärischer starrer Körper in einen mikropolar plastischen Probekörper gedrückt wird. Anhand von Simulationsergebnissen der Feldgrößen im Kontaktbereich, insbesondere der Momentenspannungsvektoren der Haft- und Reibrotationen, wurde gezeigt, dass das Kontaktmodell und seine numerische Umsetzung in der Lage ist, mikropolare Haft- und Reibungseffekte in der Kontaktzwischenschicht wiederzugeben.

Bei der zukünftigen computergestützten Untersuchung von Skaleneffekten mit mikropolaren Theorien muss ein vorderes Ziel sein, die Simulationsdauer zu reduzieren. Ansatzpunkte bieten hierbei eine geschwindigkeitsoptimierte Implementierung der Materialmodelle oder darüber hinaus eine Parallelisierung der Materialroutinen. Wenn sich hierbei verbesserte Lösungsverfahren ergeben, dann können sofort genauere Simulationen mit hochauflösenden Netzen und komplexeren Bauteilgeometrien durchgeführt werden. In diesem Fall ist es auch sinnvoll, das Kontaktmodell für große Relativrotationen zu implementieren. In Kombination mit einer feinen Netzstruktur vor allem im Bereich der Kontaktzwischenschicht sind dann Simulationen vorstellbar, die charakteristische Effekte von Eindruck- und Kratztestexperimenten wiedergeben. Bei einer verkürzten Rechengeschwindigkeit ist es weiterhin denkbar, die hier präsentierten Materialmodelle mit weiteren Effekten thermodynamisch konsistent zu koppeln. Ein Beispiel hierfür wäre die Kopplung thermischer und mechanischer Effekte in Zusammenhang mit mikropolarer Plastizität sowie klassischen und mikropolaren Reibungsvorgängen.

---

## **Erklärung**

Der Lebenslauf ist in der Online-Version aus Gründen des Datenschutzes nicht enthalten.



---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] M. ABBAS. *Algorithme non linéaire quasi-statique*, 2009. Documentation de Référence de Code\_Aster [R5.03.01].
- [2] M. ABBAS. *Éléments de contact dérivés d'une formulation hybride continue*, 2011. Documentation de Référence de Code\_Aster [R5.03.52].
- [3] M. ABBAS. *Formulation discrète du contact-frottement*, 2011. Documentation de Référence de Code\_Aster [R5.03.50].
- [4] K.-J. BATHE and P. ZIMMERMANN. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002.
- [5] S. BAUER, W.G. DETTMER, D. PERIĆ, and M. SCHÄFER. Micropolar hyperelasticity: constitutive model, consistent linearization and simulation of 3d scale effects. *Computational Mechanics*, 50(4):383–396, 2012.
- [6] S. BAUER, M. SCHÄFER, P. GRAMMENOUDES, and Ch. TSAKMAKIS. Three-dimensional finite elements for large deformation micropolar elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(41–44):2643 – 2654, 2010.
- [7] T. BELYTSCHKO, W. K. LIU, and B. MORAN. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2000.
- [8] A. BERTRAM and B. SVENDSEN. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Arch. Mech.*, 53(6):653–675, 2001.
- [9] R. de BORST. A generalisation of J2-flow theory for polar continua. *Engineering computations*, 10 (2):99–121, 1993.
- [10] H.B. CALLEN. *Thermodynamics & an Intro to Thermostatistics*. Student Edition. Wiley India Pvt. Limited, 2006.
- [11] J. CHAKRABARTY. *Theory of Plasticity*. Elsevier Science, 2006.
- [12] B. D. COLEMAN and M. E. GURTIN. Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47(2):597–613, 1967.
- [13] B. D. COLEMAN and W. NOLL. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13(1):167–178, 1963.
- [14] E. COSSERAT and F. COSSERAT. *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et fils, 1909.
- [15] A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Essentials*. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Wiley, 1991.
- [16] A. CRISFIELD. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Number Bd. 2 in Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Wiley, 1997.

- 
- [17] A. CURNIER, Q.-C. HE, and A. KLARBRING. Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction. In M. RAOUS, M. JEAN, and J.J. MOREAU, editors, *Contact Mechanics*, pages 145–158. Springer US, 1995.
- [18] T. DE SOZA. *Notice d'utilisation du contact dans Code\_Aster*, 2011. Documentation de Référence de Code\_Aster [U2.04.04].
- [19] E. DIEGELE, W. JANSOHN, and Ch. TSAKMAKIS. Finite deformation plasticity and viscoplasticity laws exhibiting nonlinear hardening rules. *Computational Mechanics*, 25(1):1–12, 2000.
- [20] DUMONT G. The active set algorithm for solving frictionless unilateral contact problems. In M. RAOUS, M. JEAN, and J. J. MOREAU, editors, *Contact Mechanics*, pages 263–266. Springer US, 1995.
- [21] R. ELSÄSSER. *Bruchmechanische Untersuchungen für elastische mikropolare Kontinua*. Wissenschaftliche Berichte. FZKA (Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt), 2002.
- [22] A. C. ERINGEN. Theory of micropolar elasticity. In H. LIEBOWITZ, editor, *Fracture*, volume II, pages 621–729. Academic Press, 1968.
- [23] A. C. ERINGEN. *Microcontinuum Field Theories.: Volume 1, Foundations and solids*. Microcontinuum Field Theories: Foundations and Solids. Springer Verlag, 1999.
- [24] A. C. ERINGEN and C. B. KAFADAR. Polar field theories. In A. C. ERINGEN, editor, *Continuum Physics*, volume IV, pages 2–75. Academic Press, 1976.
- [25] A. C. ERINGEN and E. S. SUHUBI. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—i. *International Journal of Engineering Science*, 2(2):189 – 203, 1964.
- [26] N. A. FLECK, G. M. MULLER, M. F. ASHBY, and J. W. HUTCHINSON. Strain gradient plasticity: Theory and experiment. *Acta metall. mater*, 42(2):475–487, 1994.
- [27] P. GRAMMENOU DIS. *Mikropolare Plastizität*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2003.
- [28] P. GRAMMENOU DIS and Ch. TSAKMAKIS. Hardening rules for finite deformation micropolar plasticity: Restrictions imposed by the second law of thermodynamics and the postulate of il’iushin. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 13(5):325–363, 2001.
- [29] P. GRAMMENOU DIS and Ch. TSAKMAKIS. Finite element implementation of large deformation micropolar plasticity exhibiting isotropic and kinematic hardening effects. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 62:1691–1720, 2005.
- [30] P. GRAMMENOU DIS and Ch. TSAKMAKIS. Predictions of microtorsional experiments by micropolar plasticity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 461(2053):189–205, 2005.
- [31] P. GRAMMENOU DIS and Ch. TSAKMAKIS. Micropolar plasticity theories and their classical limits. part I: Resulting model. *Acta Mechanica*, 189(3-4):151–175, 2007.



- 
- [32] P. GRAMMENOUDES and Ch. TSAKMAKIS. Incompatible deformations – plastic intermediate configuration. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 88(5):403–432, 2008.
- [33] P. GRAMMENOUDES and Ch. TSAKMAKIS. Isotropic hardening in micropolar plasticity. *Archive of Applied Mechanics*, 79(4):323–334, 2009.
- [34] M.E. GURTIN. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1982.
- [35] M.E. GURTIN, E. FRIED, and L. ANAND. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.
- [36] J.O. HALLQUIST. *NIKE2D: an Implicit, Finite-deformation, Finite-element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of Two-dimensional Solids*. UCRL: Lawrence Radiation Laboratory. Lawrence Livermore Laboratory, University of California, 1979.
- [37] P. HAUPT and Ch. TSAKMAKIS. On the application of dual variables in continuum mechanics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1(3):165–196, 1989.
- [38] P. HAUPT and Ch. TSAKMAKIS. Stress tensors associated with deformation tensors via duality. *Archives of Mechanics*, 48(2):347–384, 1996.
- [39] T. J. R. HUGHES. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications, 2000.
- [40] T. J. R. HUGHES and J. WINGET. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(12):1862–1867, 1980.
- [41] K. HUTTER and K. JÖHNK. *Continuum Methods of Physical Modeling: Continuum Mechanics, Dimensional Analysis, Turbulence*. Physics and astronomy online library. Springer, 2010.
- [42] W. JAHNSON. *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplasizität*. Dissertation, Forschungszentrum Karlsruhe, 1997.
- [43] A. S. KHAN and S. HUANG. *Continuum Theory of Plasticity*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1995.
- [44] H. B. KHENOUS, J. POMMIER, and Y. RENARD. Hybrid discretization of the signorini problem with coulomb friction. theoretical aspects and comparison of some numerical solvers. *Appl. Numer. Math.*, 56(2):163–192, February 2006.
- [45] A. KLARBRING. Derivation and Analysis of Rate Boundary-Value Problems of Frictional Contact. *European journal of mechanics. A. Solids*, 9:53–85, 1990.
- [46] E. KLINGBEIL. *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I.-Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut, Hochschultaschenbücher-Verlag, 1966.
- [47] P. KNABNER and L. ANGERMANN. *Numerik Partieller Differentialgleichungen/ Numerical Analysis of Partial Differential Equations: Eine Anwendungsorientierte Einführung/ an Application-oriented Introduction*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2000.

- 
- [48] E. KRÖNER. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 4(1):273–334, 1959.
- [49] T. A. LAURSEN. On the development of thermodynamically consistent algorithms for thermomechanical frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3–4):273 – 287, 1999.
- [50] T. A. LAURSEN. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer Verlag Berlin, 2002.
- [51] E. H. LEE. Elastic-plastic deformation at finite-strains. *Journal of Applied Physics*, 36(1):1–6, 1969.
- [52] E. H. LEE and D. LIU. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *Journal of Applied Physics*, 35(1):19–27, 38.
- [53] H. LIPPMANN. Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens. *Acta Mechanica*, 8(3-4):255–284, 1969.
- [54] D. LIU, Y. HE, X. TANG, H. DING, P. HU, and P. CAO. Size effects in the torsion of microscale copper wires: Experiment and analysis. *Scripta Materialia*, 66:406–409, 2012.
- [55] J. LUBLINER. *Plasticity Theory*. Dover books on engineering. Dover Publications, 2008.
- [56] M. LUCCHESI and M. ŠILHAVÝ. Il’yushin’s conditions in non-isothermal plasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 113(2):121–163, 1991.
- [57] H. LÄMMER. *Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit Schädigung bei kleinen und großen Deformationen*. Dissertation, Forschungszentrum Karlsruhe, 1998.
- [58] D. MAKRIDIS. *Die Wahl der Variablen bei der Formulierung von Stoffgesetzen der mikropolaren Plastizität*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2009.
- [59] J. E. MARSDEN and T. J. R. HUGHES. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2012.
- [60] R. D. MINDLIN. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1):51–78, 1964.
- [61] S. NEMAT-NASSER. *Plasticity: A Treatise on Finite Deformation of Heterogeneous Inelastic Materials*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press, 2004.
- [62] W. NOLL. *Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities*. Department of Mathematics, Carnegie Institute of Technology. Carnegie Institute of Technology, Department of Mathematics, 1967.
- [63] J. ODEN and J. MARTINS. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52:527–634, September 1985.
- [64] W. PREUSS and F. BIERBAUM. *Lehr- und Übungsbuch numerische Mathematik*. Fachbuchverl. Leipzig im Carl-Hanser-Verlag, 2001.
- [65] P. K. RASHEVSKIĬ. *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis: (übersetzung aus dem Russischen)*. Hochschulbücher für Mathematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

- 
- [66] J. REDDY. *An Introduction to the Finite Element Method*. Engineering Series. McGraw-Hill Education, 2005.
- [67] H. SCHADE. *Schade: Tensoranalysis Lg Geb*. De-Gruyter-Lehrbuch. “de” Gruyter, 1997.
- [68] M. SCHÄFER. *Numerik Im Maschinenbau*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [69] O. SCHERF. *Kontinuumsmechanische Modellierung nichtlinearer Kontaktprobleme und ihre numerische Analyse mit adaptiven Finite-Element-Methoden*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 1997.
- [70] B. F. SCHUTZ. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. University Press, 1984.
- [71] H. R. SCHWARZ. *Methode der finiten Elemente: eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis ; mit 59 Tabellen und zahlreichen Beispielen*. Leitfaden der angewandten Mathematik und Mechanik: Teubner Studienbücher . Mathematik. Teubner B.G. GmbH, 1991.
- [72] J. C. SIMO and T. J. R. HUGHES. *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary applied mathematics: Mechanics and materials. Springer, 1998.
- [73] J. C. SIMO and M. ORTIZ. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(2):221 – 245, 1985.
- [74] P. STEINMANN. A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 31(8):1063 – 1084, 1994.
- [75] J.G. SWADENER, E.P. GEORGE, and G.M. PHARR. The correlation of the indentation size effects measured with indenters of various shapes. *J. Mech. Phys. Solids*, 50:681–694, 2002.
- [76] D. TABOR. *The Hardness of Metals*. Oxford, Clarendon Press, 1951. Monographs on the physics and chemistry of materials. Oxford, Clarendon Press, 1970.
- [77] R. L. TAYLOR. *FEAP – A Finite Element Analysis Program, Version 8.2 Programmer Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering, 2008.
- [78] R. L. TAYLOR. *FEAP – A Finite Element Analysis Program, Version 8.2 Theory Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering, 2008.
- [79] C. TRUESDELL and R. TOUPIN. *The classical field theories*. Springer, 1960.
- [80] Ch. TSAKMAKIS. On the loading conditions and the decomposition of deformation. In J.-P. BOEHLER and A. S. KHAN, editors, *Anisotropy and Localization of Plastic Deformation*, pages 353–356. Springer Netherlands, 1991.
- [81] Ch. TSAKMAKIS. Kinematic hardening rules in finite plasticity part i: A constitutive approach. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 8(4):215–231, 1996.
- [82] Ch. TSAKMAKIS. Remarks on Il’ushin’s postulate. *Arch. Mech.*, 49:677 – 695, 1997.

- 
- [83] Ch. TSAKMAKIS. Description of plastic anisotropy effects at large deformations—part i: restrictions imposed by the second law and the postulate of Il’iushin. *International Journal of Plasticity*, 20(2):167 – 198, 2004.
- [84] Ch. TSAKMAKIS and A. WILLUWEIT. Time integration algorithms for finite deformation plasticity. In BAASER H. (editors) HUTTER C., editor, *Deformation and Failure of Metallic Continua*, pages 79–106. Springer, 2003.
- [85] P. WRIGGERS. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons Ltd. England, 2002.
- [86] P. WRIGGERS. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, 2008.
- [87] H. W. ZHANG, H. WANG, P. WRIGGERS, and B. A. SCHREFLER. A finite element model for contact analysis of multiple cosserat bodies. *Comput. Mech.*, 36:444–458, 2005.
- [88] H. ZIEGLER. *An Introduction to Thermodynamics*. North-Holland series in applied mathematics and mechanics. North-Holland, 1977.
- [89] O. C. ZIENKIEWICZ. *Methode der finiten Elemente*. VEB Fachbuchverlag, 1987.
- [90] O. C. ZIENKIEWICZ and R. L. TAYLOR. *The Finite Element Method: Solid mechanics*. Number Bd. 2 in Referex collection. Mecánica y materiales. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [91] A. ZMITROWICZ. A thermodynamical model of contact, friction and wear: I governing equations. *Wear*, 114(2):135 – 168, 1987.
- [92] A. ZMITROWICZ. A thermodynamical model of contact, friction and wear: {II} constitutive equations for materials and linearized theories. *Wear*, 114(2):169 – 197, 1987.
- [93] A. ZMITROWICZ. A thermodynamical model of contact, friction and wear: {III} constitutive equations for friction, wear and frictional heat. *Wear*, 114(2):199 – 221, 1987.